

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ МОСКОВСКОЙ ОБЛАСТИ
Государственное образовательное учреждение высшего образования Московской области
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ОБЛАСТНОЙ УНИВЕРСИТЕТ
(МГОУ)

Физико-математический факультет
Кафедра высшей алгебры, элементарной математики и методики преподава-
ния математики

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

на тему: **«Методика обучения решению уравнений и неравенств с
модулем в основной школе»**

Жучкова Юлия Сергеевна

По направлению подготовки
Профиль подготовки

44.03.05 «Педагогическое образование»
Математика и информатика

Руководитель
выпускной квалификационной
работы

Пинчук И.А., к. физико-
математических н., доцент

(подпись, дата)

Москва
2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ГЛАВА 1. НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ И ПСИХОЛОГО- ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С МОДУЛЕМ В ОСНОВНОЙ ШКОЛЕ.....	5
1.1. История возникновения модуля числа.....	5
1.2. Основные определения и свойства модуля числа с точки зрения матема- тики.....	8
1.3. Методы обучения математике в основной школе.....	12
1.4. Возрастные особенности обучающихся в основной школе.....	15
Выводы по первой главе.....	20
ГЛАВА 2. РАЗРАБОТКА МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ УРАВНЕ- НИЙ И НЕРАВЕНСТВ С МОДУЛЕМ.....	21
2.1. Анализ учебных комплектов по алгебре.....	21
2.2. Различные методы решения уравнений и неравенств, содержащих мо- дуль.....	26
2.3. Разработка элективного курса по теме: «Решение уравнений и нера- венств с модулем».....	35
2.4. Конспект одного урока элективного курса	59
Выводы по второй главе.....	63
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	65
ЛИТЕРАТУРА.....	66
ПРИЛОЖЕНИЕ.....	70

ВВЕДЕНИЕ

Понятие абсолютной величины или определение модуля служит одним из самых главных характеристик числа в сфере как действительных значений, так и комплексных значений.

Данное определение обширно используется не только лишь в ходе обучения математике в школе, но и при изучении математики, физики и других наук, которые изучаются в вузах. К примеру, в математическом анализе рассматривается определение абсолютной величины в таких терминах, как: предел, ограниченная функция и др. Задания, основанные на абсолютных величинах, многократно встречаются на олимпиадах по математике и на основном государственном экзамене.

Данная тема приобретает важность в связи с тем, что в школьном курсе математики мало времени отводится на решение уравнений и неравенств с модулем.

Материал по данному вопросу присутствует во многих разделах учебников математики с 6 по 9 классы, именно поэтому у обучающихся возникают трудности в их обобщении, так как они применяются на разных ступенях образовательного процесса. При решении уравнений и неравенств с модулем, обучающиеся с каждым годом отрабатывают и повторяют полученные ранее знания. Тем самым они могут вспомнить способы решения уравнений различных степеней, а так же закрепят навык по решению неравенств.

Данная работа поможет познакомить обучающихся с множеством методов решения уравнений и неравенств с модулем. Для лучшего освоения материала необходимо разработать элективный курс для систематизации знаний и более осознанного выбора методов решения задач с модулем.

А при наличии нужного багажа знаний по решению уравнений и неравенств с модулем обучающимся будет гораздо проще усвоить материал и применить его в дальнейшем. И ко всему этому, можно добавить, что углуб-

ленность знаний в данной теме способствует образованию межпредметных связей, которые улучшат восприятие других предметов.

Цель работы: изучить основные виды уравнений и неравенств с модулем и разработать элективный курс по обучению методам решения уравнений и неравенств с модулем.

Задачи работы:

1. Изучить научно-методическую литературу по теме исследования.
2. Проанализировать историю возникновения модуля числа.
3. Выявить основные методы решения уравнений и неравенств с модулем.
4. Разработать элективный курс по теме: «Решение уравнений и неравенств с модулем».

Объект исследования: процесс обучения алгебры в основной школе.

Предмет исследования: методика обучения решению уравнений и неравенств с модулем в основной школе.

Основные методы исследования: изучение научно-методической и учебной литературы, наблюдения за учебным процессом, беседы с учителями.

ГЛАВА 1. НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ И ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С МОДУЛЕМ В ОСНОВНОЙ ШКОЛЕ

1.1. История возникновения модуля числа

Понятие модуля имеет немало разновидностей, вследствие чего необходим более углублённый подход при изучении данной темы. Но для начала совершим исторический обзор становления термина «модуль».

Понятие модуль числа имеет иное название - абсолютная величина. Само определение «модуль» корнями из латинского названия *modulus*, что на русский язык переводится слово как «мера». Было принято обозначать абсолютную величину(модуль) в виде $||$ [17].

Имеется утверждение, что термин предложил использовать английский математик и философ Роджер Котс (родился 10 июля 1682 - скончался в возрасте 33 лет). Он являлся учеником Ньютона. К 24 годам Котс был назначен профессором астрономии и экспериментальной философии в Кембриджском университете [17].

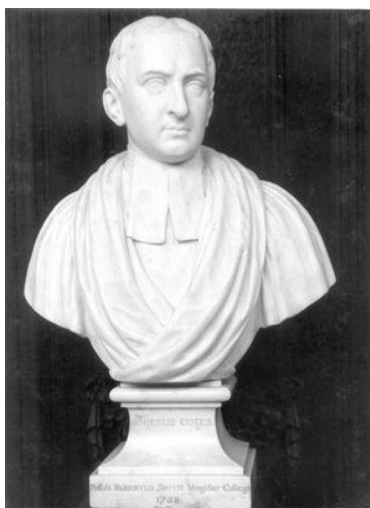


Рис. 1. Бюст Роджера Котса

Еще одним кто использовал понятия модуля был Готфрид Вильгельм Лейбниц (родился в 1646 и умер в 1716 году) и обозначал его как: $\text{mol } x$. Лейбниц к тому же являлся основателем Берлинской Академии наук.



Рис. 2. Портрет Вильгельма Лейбница

И уже окончательное обозначение абсолютной величины в 1841 году ввел Карл Теодор Вильгельм Вейерштрассе (родился в 1815 году и скончался в 1896 году), который являлся немецким математиком. Именно благодаря этому выдающемуся математику Софья Ковалевская смогла продолжить изучение и преподавание математики уже в Стокгольмском Университете, в самый трудный момент ее жизни [32].



Рис. 3. Портрет Карла Вейерштрассе

Простейшие примеры модуля появляются уже у К. Гаусса, как группы классов бинарных квадратичных форм. Обобщённые понятия модуля можно встретить уже в 60 - 80-х г.г. 19 века в работах Р. Дедекинда и Л. Кронекера [32].

А непосредственно для комплексных чисел понятие модуля ввел французский математик, а по совместительству механик, Огюстен Луи Коши (родился 1789 - умер 1857) в начале XIX века. В последующий период Австрийский ученый Конрад Лоренц применил символику модуля для обозначения длины вектора.



Рис. 4. Французский математик Огюстен Луи Коши

Такое понятие как абсолютная величина считается одним из основных понятий элементарной математики, да и к тому же благодаря простоте вычисления функции модуля, ее включили в список основных функций всех языков программирования.

1.2. Основные определения и свойства модуля числа с точки зрения математики

Модуль является числовой характеристикой, которая представляет объект. Обычно значение модуля неотрицательное действительное число. Понятие модуля фигурирует в различных разделах математики, хотя иногда и под другими названиями - абсолютное значение, норма, абсолютная величина [19].

Для начала определимся с обозначением модуля числа. Модуль числа a обозначается так: $|a|$.

Далее дадим определение модуля числа.

Определение. Модуль числа a - это либо само число a , если a - положительное число, либо число $-a$, противоположное числу a , если a - отрицательное число, либо 0, если $a=0$ [11].

Выше изложенное определение записывают в виде:

$$|a| = \begin{cases} a, & a > 0 \\ 0, & a = 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}, \text{ данная запись понимается как } |a| = a, \text{ если } a > 0, \quad |a| = 0, \text{ если}$$

$a = 0$, и $|a| = -a$, если $a < 0$ [11].

Так же эту запись можно представить немного по-другому.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{при } a \geq 0 \\ -a, & \text{при } a < 0 \end{cases}, \text{ данная запись понимается как } |a| = a, \text{ если } a \geq 0,$$

$|a| = -a$, если $a < 0$ [11].

И ещё одна запись $|a| = \begin{cases} a, & a > 0 \\ -a, & a \leq 0 \end{cases}$ В данной записи поясним тот случай,

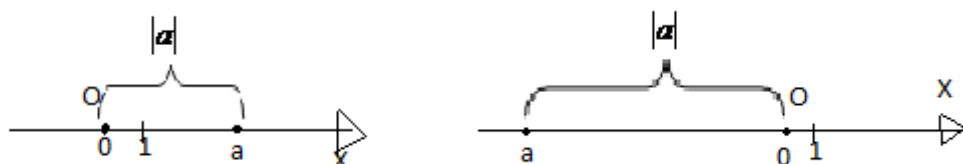
когда $a=0$. Тогда получим $|0| = -0$, но $-0=0$, потому что число 0 будет противоположно самому себе.

Из определения модуля числа следует, что модуль числа равен числу под знаком модуля без учёта его знака. Озвученное утверждение объясняет,

почему модуль числа называют ещё абсолютной величиной числа. Так модуль числа и абсолютная величина числа - это одно и то же [11].

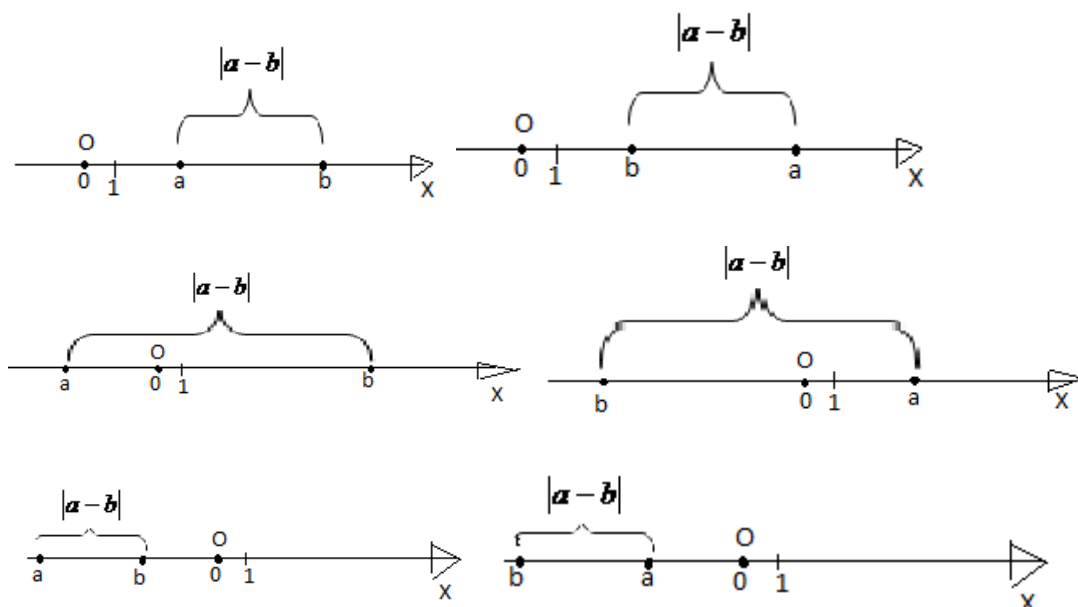
Модуль числа ещё представляется геометрически, как расстояние. Рассмотрим определение модуля числа, используя расстояние.

Определение. Модуль числа a - это расстояние от начала отсчёта на координатной прямой до точки, соответствующей числу a [20].



Разъясним это определение. Расстояние от отправной точки до точки, которая содержит значение со знаком $+$ (положительное число), равно положительному этому числу. Расстояние от отправной точки до точки с координатой 0 равно 0, так как 0 является отправной, начальной точкой. Расстояние от отправной точки до точки, которая содержит значение со знаком $-$ (отрицательное число), равно этому числу с противоположным знаком, в связи с тем, что равно расстоянию от отправной точки значение которой будет число противоположное.

Определение. Модуль разности двух чисел a и b равен расстоянию между точками координатной прямой с координатами a и b [11].



Иногда понятие модуля раскрывается через арифметический квадратный корень.

Определение. Модуль числа a - это арифметический квадратный корень из квадрата числа a , то есть, $|a| = \sqrt{a^2}$ [20].

Основные свойства модуля:

Для модуля характерен ряд свойств. Рассмотрим эти свойства [20].

1. $|a| \geq 0$; так как модуль - это расстояние, а значит оно не может оказаться отрицательным.

2. $|a| = |-a|$; так как две любые точки на координатной прямой, координатами которых являются противоположные числа, находятся на одинаковом расстоянии от начала отсчёта, значит модули противоположных чисел равны [20].

3. $|a| \geq a$;

4. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$; по определению модуля произведения чисел a и b равен либо $a \cdot b$, если $a \cdot b \geq 0$, либо $-(a \cdot b)$, если $a \cdot b < 0$. Из правил умножения действительных чисел следует, что произведение модулей чисел a и b равно либо $a \cdot b$, если $a \cdot b \geq 0$, либо $-(a \cdot b)$, если $a \cdot b < 0$, что доказывает это свойство [20].

5. $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$, если $b \neq 0$; в связи с тем, что $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$, то $\left| \frac{a}{b} \right| = \left| a \cdot \frac{1}{b} \right|$. По свойству 4 имеем $\left| a \cdot \frac{1}{b} \right| = |a| \cdot \left| \frac{1}{b} \right|$. Далее, используем выражение $\left| \frac{1}{b} \right| = \frac{1}{|b|}$, которое следует из определения модуля [20].

6. $|a + b| \leq |a| + |b|$;

7. $|a + b| = |a| + |b|$ тогда и только тогда, когда $ab \geq 0$;

8. $|a + b| = a + b$ тогда и только тогда, когда $a \geq 0$ и $b \geq 0$;

9. $|a - b| \leq |a| + |b|$;

10. $|a - b| = |a| + |b|$ тогда и только тогда, когда $ab \leq 0$; ?

11. $|a| - |b| \geq 0$ тогда и только тогда, когда $a^2 - b^2 \geq 0$.

Модуль комплексного числа

Рассмотрим понятие модуля комплексного числа. Пусть мы имеем комплексное число, записанное в алгебраической форме $z = x + i \cdot y$, где x и y - некоторые действительные числа, представляющие собой соответственно действительную и мнимую части данного комплексного числа z , а $i = \sqrt{-1}$ - мнимая единица [7].

Определение. Модулем комплексного числа $z = x + i \cdot y$, называется арифметический квадратный корень из суммы квадратов действительной и мнимой части данного комплексного числа [7].

Модуль такого числа записывается так: $|z|$. Вышеизложенное определение модуля комплексного числа можно записать так: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Геометрическое представление модуля комплексного числа можно определить через расстояние.

Определение. Модуль комплексного числа z - это расстояние от начала комплексной плоскости до точки, соответствующей числу z в этой плоскости [7].

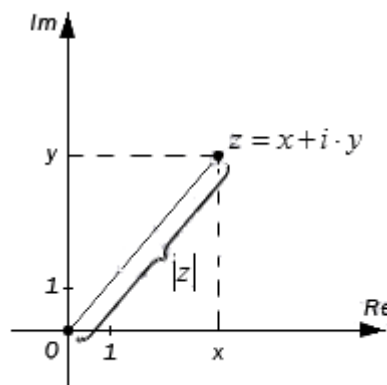


Рис. 6. Геометрическое представление модуля комплексного числа

Определение. Модулем комплексного числа z - это арифметический квадратный корень из произведения этого числа и числа, комплексно сопряжённого с ним, то есть $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ [7].

Все рассмотренные свойства модуля так же верны и для комплексных чисел.

Для действительных чисел определения модуля в комплексном смысле и в действительном совпадают.

1.3. Методы обучения математике в основной школе

На сегодняшний день, в новом Федеральном Государственном Образовательном Стандарте (ФГОС) указаны все требования, которые предъявляются к педагогическому работнику, учебным материалам, образовательным условиям в учебном заведении. Эти новые образовательные стандарты не ограничивают педагога, а позволяют ему проявлять нетрадиционные подходы к обучению [35].

Методами обучения называют такую характеристику этого процесса, которая не зависит от числа обучающихся и их взаимодействий, а описывает учебную деятельность каждого обучающегося [15]. В каком виде не вводили бы в обучение, например, теорему косинусов, необходимо достичь того, чтобы все обучающиеся знали наизусть эту теорему и могли применить её. Для достижения этого школьнику необходимо узнать текст теоремы и он должен ознакомиться с разнообразной типологией задач. Обучающийся должен понять как применять способы к решению задач. Это является составной частью обучения каждого школьника с целью выявления их способностей. Данный метод существенно влияет на темпы и успешность выполнения задания, но порядок действий не подлежит изменениям. Вот теперь мы можем дать определение термина «методы обучения», который характеризует все манипуляции обучающимися для решения конкретной задачи.

Метод (от греч. *methodos* - путь исследования) - способ достижения цели. Метод обучения - упорядоченный комплекс дидактических приёмов и средств, с помощью которых реализуются цели обучения и воспитания. Ме-

тоды обучения включают взаимосвязанные, последовательно - чередующиеся способы целенаправленной деятельности учителя и обучающихся [15].

Каждый из методов имеет свою цель, порядок действий, материалы для обучения и достижение самой цели. Объектом и субъектом процесса обучения является обучающийся.

Определенный метод обучения применяется в случае, когда обучающийся занимается какой то научной или исследовательской деятельностью и применение других методов нецелесообразно.

На сегодняшний день выделяется основная классификация методов обучения.

1) По типу работы с информацией [2].

- Объяснительно - иллюстративная (рассказ, лекция, беседа, презентация и т.д.);

- репродуктивная (решение задач, повторение опытов и т.д.);

- проблемная (проблемная задача, познавательная задача и т. д.);

- частично - поисковая или эвристическая;

- исследовательская [2].

2) По компонентам деятельности:

- организационно-действенные - методы организации и осуществления учебно-познавательной деятельности;

- стимулирующие и мотивационные методы учебно-познавательной деятельности;

- контрольно-оценочный метод контроля учебно-познавательной деятельности [2].

По характеру изучения:

- методы изучения новых знаний;

- методы закрепления знаний;

- методы контроля [2].

И наконец давайте рассмотрим 3 основных метода обучения в основной школе:

1. Первым методом является эвристический.

Но что же такое «Эвристика» на самом деле? Данный метод основан на том принципе что обучающийся может и должен находить весьма нестандартные решения для выполнения задачи. Что способствует более углубленному изучению вопроса в целом. Так же можно выделить несколько признаков данного метода в обучении [16]:

1) Знания, получаемые обучающимися, не подаются им в полностью в готовом виде, они должны искать решения некоторых аспектов вопроса сами.

2) Педагог во время занятия ставит перед обучающимися определенную цель и предлагает им различные источники информации.

3) Обучающиеся под контролем педагога рассуждают и ищут решения задач, делают выводы что способствует более углубленному познанию в данном аспекте.

2. Вторым методом является так называемый «Проблемный метод» [16].

Данным метод основан на том что преподаватель выявляет основные и самые трудные вопросы поставленной задачи и акцентирует на них большую часть учебного процесса. Но и в то же время во время обучения перед школьником возникают трудности и педагог должен стать путеводителем для разрешения этих проблем. В основном во многих задачах имеется несколько неизвестных и в процессе их появления обучающийся должен выявить связь между ними и найти один подход для решения всех задач [16].

Само понятия проблемной задачи можно охарактеризовать как некое несоответствие между знаниями обучающегося и задачами поставленными перед ним. Педагог специально создает препятствия для обучающихся для того, чтобы в дальнейшем они могли легко решать любые поставленные задачи и у них было несколько различных вариантов ее решения

Данным метод весьма хорош именно потому что полученных подход можно применять и в любых отраслях науки и жизни обучающегося.

3. Метод дифференцированного обучения

При использовании данного метода решение задачи разделено на определенные ступени и учитываются способности каждого обучающегося. Но при этом педагог помогает каждому обучающемуся на равных не делая каких либо поблажек и лишь в конце занятия после подведения итогов педагог выявляет и поощряет наиболее сильных обучающихся [16].

Так же для улучшения продуктивности работы обучающихся педагог может разделить их на группы и тем самым поставив к слабым более сильных обучающихся и наоборот.

Выделяют несколько форм дифференцированного обучения:

- а) коллективная;
- б) групповая;
- в) индивидуальная;
- г) фронтальная.

В настоящий момент, данный метод весьма актуален, так как нагрузка на преподавателей возросла, а потому целесообразней группировать обучающихся для самостоятельной работы и взаимовыручки. Тем самым преподаватель затрачивает меньше времени на объяснение материала каждому обучающемуся, так как более сильные помогают отстающим и это способствует сплочению коллектива.

1.4. Возрастные особенности обучающихся в основной школе

Каждый педагог, работающий с детьми или подростками, обязан знать особенности и нюансы возрастного развития обучающихся. Это необходимо для того, чтобы преподносить информацию именно в том виде в котором обучающийся сможет воспринимать и усваивать её в полном объёме. Весь процесс обучения основывается на подаче информации ребенку и дальнейшего самостоятельного совершенствования и развития.

Этапы развития личности ребёнка можно поделить на несколько периодов [36]:

1. младенческий - от рождения до 1 года жизни, в этот период ребенок только лишь начинает узнавать мир, запахи, звуки, но не осознанно;
2. преддошкольный возраст - от 1 года до 3 лет, в данном периоде ребенок оказывается в коллективе и отрывается от груди матери;
3. дошкольный возраст - от 3 до 7 лет, характеризуется усиленной умственной деятельностью, ребенок запоминает цвета, изучает алфавит и его речь становится осознанной ;
4. младший школьный возраст - от 7 до 11 - 12 лет;
5. средний школьный возраст (подростковый) - от 12 до 15 лет;
6. старший школьный возраст (юношеский) - от 15 до 18 лет.

Младший школьный возраст.

При достижении 7 лет у ребенка формируется определенный уровень знаний и интересов в различных сферах. Всё это свидетельствует о его готовности пойти в школу и усваивать большой объём информации.

С первыми школьными днями претерпевает колоссальные изменения весь распорядок дня ребёнка: режим отдыха и увеличиваются умственные нагрузки. В данный период основным родом деятельности становится обучение. В основном обучающиеся младших классов любят учиться и гордятся новым статусом «Ученик». А так же у них появляются обязанности, которые учат их ответственности, тем самым ребенок чувствует себя взрослым. И в первое время ими очень болезненно воспринимаются неудачи в учёбе причиной которых они считают недостаточное старание, а не обычные ошибки. Да и к тому же, все дети любят чтобы их хвалили, и если педагог регулярно хвалит обучающегося, тот в свою очередь прикладывает ещё больше усилий в освоении материала. Этому так же способствует и то, что когда в классе 30 человек, а хвалят всего 3 - 4, ребёнок испытывает чувство гордости и уверенности в своих силах.

Средний школьный возраст.

Этот период характеризуется увеличением нагрузки вызванной большим объёмом материала по всем предметам, которых насчитывается около 15. Теперь вместо одного педагога их может быть 5 или 7, и методика преподавания у каждого своя, что приводит к трудному перестроению на новый лад обучения. Так же это может приводить к появлению стресса у обучающегося при такой нагрузке и упадку усвоения информации, да и само отношения к обучению меняется.

Данный возраст связан с самым важным изменением, как в физическом, так и в психологическом развитии обучающихся, который получил название - половое созревание. У девочек этот процесс начинается в районе 11 лет, а у мальчиков позже. У каждого ребёнка этот процесс протекает по-разному. У некоторых данный процесс отражается на поведении и на концентрации внимания. Так же половое созревание сказывается на отношениях между девочками и мальчиками. Да и ко всему этому можно добавить то, что дети в данном возрасте очень восприимчивы к получению информации по средствам интерактивных уроков или презентаций, но так же понижается усидчивость, что ведет к потере концентрации внимания в образовательном процессе. И вместе с этим у ребенка начинает появляться собственное мнение и он пытается его отстаивать путем различных споров. Зачастую, эти споры являются результатом исключительно выражением собственного ЭГО, которое не подкреплено ни знаниями, ни умениями, а только лишь детскими принципами. И авторитет педагога уходит на глазах. Да и ко всему этому школьник начинает выделять для себя перспективные предметы, которые могут пригодиться в дальнейшем развитии. А на развитие в других областях перестает уделять время и резко падает успеваемость [37].

Так же во время становления личности обучающийся начинает задавать вопросы такого характера как: А зачем? А для чего нам это делать? А зачем нам это в жизни пригодится? Именно это и характеризует эмоционально-

волевою сферу подростка в которой можно выделить: вспыльчивость, частое недовольство, конфликтность с педагогами, особенно во время споров.

При возникновении трудных ситуаций обучающийся частенько не доделывает начатое именно из за своей несобранности и несдержанности, либо когда просто чем то обеспокоен.

Подростковый период - это подходящее время для творческого развития. В результате чего обучающиеся стремятся находить выход из различных ситуаций.

Как говорилось ранее что педагог теряет авторитет в глазах ученика, но и родители уже не являются авторитетами и образцом для подражания. И начинается поиск образца для подражания. Этим образцом может стать герой из фильма, который вызвал сильные эмоции у ребенка или же человек который является любимцем всех. Чаще всего образцом становится либо сверстник, либо обучающийся старших классов, который преуспел в каком-либо деле или имеет успех среди обучающихся. Но часто для примера берут людей, которые имеют авторитет среди сверстников исключительно из своей бунтарской натуры так называемые «плохиши» и не преуспевшие в обучении.

Обучающиеся в 13 - 15 лет имеют личностную особенность казаться быть взрослым, но на самом деле это лишь их образ . Любыми способами подросток пытается обратить на себя внимание. В погоне за ощущением взрослости подросток пытается развиться во всех аспектах жизни, дела по дому, решать важные вопросы да и само поведение ребенка существенно меняется. При этом обучающийся начинает выбирать взрослую одежду, манера разговора тоже меняется, новые слова, порой недопустимые в общении со сверстниками, начинают употреблять спиртные напитки и курить сигареты, чтобы подражать взрослым. Подросток начинает часто ругаться и спорить со взрослыми, а так же всячески пытается доказать, что его не нужно опекать. При всём этом родители в данный период должны выступать в роли старшего товарища, к которому можно обратиться за

помощью или советом, но никак не опекать. Данный метод способствует уменьшению количества конфликтных ситуаций между детьми и их родителями, а так же между обучающимися и педагогами [22].

Немало важный факт, какое место занимает обучающийся в обществе своего класса. И подросток старается всячески выделиться и завоевать уважение у сверстников. Так же можно выделить так называемых «Изгоев» им труднее всех дается процесс обучения, потому что помимо нагрузок школьной программы на них давит и психологический фактор из за отсутствия друзей.

Средний школьный возраст благоприятен для периода предпрофильной подготовки и профильного образования индивидуального образовательного маршрута. Индивидуальный образовательный маршрут возник как результат практической деятельности образовательной организации, ориентированной на индивидуальные запросы обучающихся в образовательных отношениях[14].

Все выше рассмотренные возрастные особенности обязан знать и принимать к сведению педагог в своём деле. На сегодняшний день существует множество подходов к категориям детей. Детей можно разделить по типам: одаренные, трудно-воспитываемые и с отклонениями как в физическом так и в психологическом развитии.

Вообще, подготовка ребенка к жизни в обществе начинается с того какие установки дает ему семья. Если ребенок живёт в хорошей семье и рядом с ним всегда есть родные, то он никогда не станет «изгоем» и будет развит во многих направлениях, так как будет контактировать с разными членами семьи, у которых есть свое мнение и интересы. Так же если в семье к старшим относятся с уважением, то и в школе подросток будет вести себя достойно.

Школа является первой ступенью в жизни подростка и его социального развития.

Выводы по первой главе

Главной задачей среднего образования дать возможность получить качественное образование, которое соответствует стандартам (ФГОС), перспективе обучения, актуализации знаний у обучающихся

Рассматривая целенаправленно тему «Модуль числа», нужно стремиться, чтобы обучающиеся основательно вникали в смысл темы и имели фундаментальные знания, умения и навыки. Это помогает развить у школьника логику мыслей, научить подводить итоги выполненных заданий, а также развивать заинтересованность в математике. Что влечёт за собой собранность, аккуратность, внимательность и порядок.

Самым трудным аспектом в образовательном процессе является возраст обучающихся. Нами были рассмотрены и проанализированы лишь два из них - это младший и средний.

Младший возраст является самым трудным по части усвоения информации, именно из-за того, что обучающийся претерпевает изменения связанные с изменением распорядка дня, определенных правил поведения во время обучения. Но при всем при этом, при правильно построенном процессе обучения данная ступень развития может пройти безболезненно, для этого необходимо правильно организовать работу между как учителем и обучающимся, так и внутриклассовое взаимодействие.

Средний возраст является наиболее нагруженным по причине появления большого количества новых предметов, а так же и формированию личности и характера обучающихся. Да и к тому же у обучающихся появляются интересы, несвязанные с образовательным процессом, в следствии чего усвоение информации может снижаться. И именно в этот период педагогу приходится искать новые методы ознакомления обучающихся с материалом.

ГЛАВА 2. РАЗРАБОТКА МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С МОДУЛЕМ

2.1. Анализ учебных комплектов по алгебре

На данный период времени 2016 - 2017 г. действует закон, установленный министерством образования РФ, который был принят 31 марта 2014 г. об рекомендованных к применению перечня учебной литературы. В этот перечень учебной литературы входят [29]:

Математика:

1. Башмаков М.И. Математика (2 части); 5,6 кл.
2. Бунимович Е.А., Дорофеев Г.В., Суворова С.Б. и др. Математика 5 кл.
3. Бунимович Е.А., Кузнецова Л.В., Минаева С.С. и др. Математика 5 кл.
4. Н.Я. Виленкин, В.И. Жохов и др. Математика 5,6 кл.
5. Гельфман Э.Г. Математика (2 части); 5кл.
6. Гельфман Э.Г. Математика 6кл.
7. Дорофеева Г.В. Математика 5,6 кл.
8. Дорофеев Г.В., Петерсон Л.Г. Математика (2 части) 5 кл.
9. Дорофеев Г.В., Петерсон Л.Г. Математика (3 части) 6 кл.
10. Истомина Н. Б. Математика 5,6 кл.
11. Козлов В.В., Никитин А.А и др. Математика 5,6 кл.
12. Козлов В.В., Никитин А.А и др. Математика: алгебра и геометрия 7,8,9 кл.
13. А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир Математика 5,6 кл.
14. Муравин Г.К., Муравина О.В. Математика 5,6 кл.
15. Муравин Г.К., Муравина О.В. Алгебра 7,8,9 кл.
16. С.М. Никольский, М.К. Потапов Н.Н., и др. Математика 5,6 кл.

17. Шарыгин И.Ф., Ерганжиева Л.Н. Математика. Наглядная геометрия. 5 - 6 кл.

Алгебра:

18. Башмаков М.И. Алгебра: учебник для 7,8,9 кл.

19. Гельфман Э.Г., Демидова Л. Н., Терре А. И. и др. Алгебра 7, 8, 9 кл.

20. Дорофеев Г.В., Суворова С.Б. и др. Алгебра 7, 8, 9 кл.

21. Колягин Ю.М., Ткачёва М.В. и др. Алгебра 7, 8, 9 кл.

22. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г. и др. Алгебра 7, 8, 9 кл.

23. А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский и др. Алгебра 7, 8, 9 кл.

24. А.Г. Мерзляк, В.М. Поляков Алгебра 7, 8, 9 кл.

25. Никольский С.М., Потапов М.К. и др. Алгебра 7, 8, 9 кл.

В этом пункте мы с вами определим в какой период обучения перед школьниками встает вопрос такого определения, как «модуль числа». Так же рассмотрим и проведем анализ самой подачи информации в каждом учебнике. Впервые обучающиеся встречаются понятие «модуль числа» в 6 - ом классе в разделе «Рациональные числа», либо «Целые числа».

Ну и наконец, начнем анализ учебников из курса математики с целью определения в какой период появилось понятие «модуль числа» в школьной программе. Впервые школьники встречаются данное определение в учебнике математики 2015 года в главе «Целые числа» авторами которого являются Никольский С.М, Потапов М.К и др [24].

Сперва перед школьниками появляется определение противоположных чисел, а уже далее рассматриваются определения модуля положительного и модуля отрицательного числа. Под определением модуль числа следует понимать следующую закономерность то что противоположные числа имеют одинаковый модуль.

Теперь рассмотрим учебник Математики 6 - го класса авторами которого являются Виленкин Н.Я и др и уже здесь мы встречаем именно геометрическое понятие «модуля числа» Под понятие модуль числа можно считать расстояние от начала координат до точки А. Модуль такого числа как 0 равен

0, потому что 0 является началом координат. Модуль числа не может быть отрицательным. А для положительного числа и нуля он равен самому числу а для отрицательного противоположному [6].

Далее проанализируем учебник Математики для 6 класса 2015 года авторами которого являются Дорофеев Г.В., Петерсон Л.Г. Данный учебник состоит из 3 частей. «Модуль числа» затрагивается в 2 части учебника в разделе «Рациональные числа» [8].

Расстояние от начала отсчёта до точки, обозначающей данное число, называют модулем этого числа (от латинского *modus* - мера, величина) [8].

В связи с тем, что противоположные числа находятся на равном расстоянии друг от друга, считая от нуля, значит модули будут равны. Модуль числа 0 равняется 0. Число 0 находится на нулевом расстоянии от самого себя. Модуль не может быть отрицательным, так как модуль - это расстояние. Таким образом, для любого числа a выполняется неравенство $a \geq 0$ [8].

Теперь углубимся в учебники математики 6 - го класса, применяемых в школах, таких авторов как: Виленкин Н.Я. и Никольский С.М.

Тема «Модуль числа» у Виленкина Н.Я. изучается в главе «Рациональные числа». Её изучение идёт сразу после изучения темы «Противоположные числа».

Даётся такое понятие: «Модулем числа a называют расстояние (в единичных отрезках) от начала координат до точки $A(a)$ [6].

Далее рассматриваются такие утверждения: модуль числа 0 равняется 0, модуль числа не может быть отрицательным. Для положительного числа и нуля он равен самому себе, а для отрицательного - противоположному числу. Противоположные числа равны по модулю [6]. Также по каждому утверждению приведены примеры для наглядного понимания материала.

В данном комплекте учебников для обучающихся представлены задания по теме «Модуль числа». По направленности их можно разделить на:

- определение модуля, заданного числа (№950, №955);
- нахождение расстояние по координатам, заданных точек (№ 952);

- определение значения, заданного выражения (№953).

Тема «Модуль числа» у Никольского С.М. изучается в главе «Целые числа». Её изучение идёт сразу после изучения темы «Отрицательные целые числа».

Даётся такое понятие: Числа, которые отличаются только знаком, называют противоположными [24].

Если установить знак «-» перед целым числом, то в итоге получим противоположное число тому, которое было задано. Число 0 считается противоположным самому себе, т.е. $0 = -0 = +0$ [24]. Также автор вводит необходимые обозначения.

Модуль положительного числа называют само это число. Модулем отрицательного числа называют противоположное ему число [24].

В данном комплекте учебников для обучающихся представлены задания по теме «Противоположные числа. Модуль числа». По направленности их можно разделить на:

- определение модуля, заданного числа (№ 218);
- определение значения, заданного выражения (№222-№224);
- определение какие числа являются положительными, а какие отрицательными (№216).

Из этого следует, что самым оптимальным в теоретическом аспекте учебником по математике 6 - го класса является материал, автор которого Н.Я Виленкин. А вот по части заданий наилучшим является учебник Никольского С.М.из за того, что в нем множество простейших заданий с модулем, которые являются весьма хорошей базой для отработки навыков решения более сложных задач.

Разберём учебную литературу по алгебре 7 - 9 класса.

Алгебра 7 класс.

В учебнике Никольского С.М. в разделе «Рациональные числа» изучается тема «Понятие действительного числа». В данном пункте автор рассматривает определение действительного числа, так же он даёт определение

противоположных чисел и уже здесь появляется определение абсолютной величины.

Абсолютной величиной (или модулем) действительного числа a называют :

- само число a , если a - положительное число;
- 0 , если a - нуль;
- число $(-a)$, если a - отрицательное число [25].

Автор вводит обозначение абсолютной величины.

В данном учебнике представлено малое количество заданий с модулем.

Алгебра 8 класс.

При работе с учебником Ю.Н Макарычева такое понятие, как модуль появляется при изучении темы «Функция». Например в задании 194 нам необходимо определить допустимые значения выражения, в котором два выражения имеют в знаменателе переменную под знаком модуля. А уже в задании 249 нам дано задание построить график функции, у которого в знаменателе так же есть модуль. Оба этих задания имеют повышенный уровень сложности.

Работая с темой «Действительные числа», обучающимся предоставляется задание целью которых является раскрытие непосредственно знака модуля.

Во время работы с главой «Арифметический квадратный корень» перед обучающимися стоит вопрос изучения теоремы «При любом значении X верно равенство» В заданиях по данной теме имеется множество заданий в которых можно отработать навык применения данной теоремы [18].

Алгебра 9 класс.

В учебной литературе, автором которой является Никольский С.М., рассматривается тема: «Неравенства, содержащие неизвестное под знаком модуля». В данном пункте затрагиваются неравенства, которые имеют неизвестное в под модульном выражении. Здесь же рассматривается несколько способов решения неравенств с модулем (графический, с помощью коорди-

натной прямой и др.). Обучающимся предоставлен набор заданий для закрепления и улучшения знаний по данной теме [26].

Проанализировав вышеизложенную учебную литературу, можно сделать следующие выводы:

- в каждой взятой учебной литературе обучающийся знакомится с модулем при нахождении значения выражения, при решении уравнений и неравенств;
- в учебниках затрагиваются различные способы решения уравнений и неравенств с модулем;
- в каждой взятой учебной литературе, задания с модулем применяются для закрепления и лучшего усвоения знаний обучающимися по данной теме.

В итоге, можно сказать, что для обучения разного уровня подготовки обучающихся по теме «Модуль», в общеобразовательном заведении рекомендуется пользоваться различной учебной литературой.

В учебном процессе по дисциплине «математика» необходимо сконцентрировать внимание на решение уравнений и неравенств с модулем, для того, чтобы обучающиеся смогли далее свободно решать уравнения и неравенства, содержащие модуль и повышенной сложности уравнения и неравенства, например, с параметрами.

2.2. Различные методы решения уравнений и неравенств, содержащих модуль

С 6 класса педагогический работник формирует у обучающихся понимание понятия «модуль числа». После прохождения 3 - 4 уроков, направленных на изучение понятия модуля, с обучающимися уже можно начинать решать уравнения с модулем, постепенно переходя от лёгким к более сложным уравнениям [3].

$$1) |x| = x + 3$$

$$2) |x| = -3x + 5$$

$$3) |x - 3| = 2$$

$$4) |2x - 5| = 2 - x$$

$$5) |3x - 5| = |5 - 2x|$$

Чтобы решить данные уравнения, обучающимся потребуется знать определение модуля. Школьники учатся производить простейшие операции с модулем, также они стараются осознать, что подмодульное выражение может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Но значение самого модуля может быть только неотрицательным. Обучающиеся рассматривают свойства модуля и, опираясь на них, решают уравнения [3]. Представленные выше уравнения школьники 6-го класса решают с помощью определения модуля, а после решения проверяют полученные значения. Это делается для того, чтобы не было посторонних корней. Рассмотрим пару примеров.

Пример 1. Решить уравнение: $|2x - 5| = 2 - x$

Решение: Раскрываем модуль по определению модуля

$$2x - 5 = 2 - x \quad \text{и} \quad 2x - 5 = -(2 - x)$$

$$2x + x = 2 + 5 \quad 2x - 5 = -2 + x$$

$$3x = 7 \quad 2x - x = -2 + 5$$

$$x = 2\frac{1}{3} \quad x = 3$$

Проверяем полученные корни при помощи подстановки в данное уравнение.

$$\left| 2 \cdot 2\frac{1}{3} - 5 \right| = 2 - 2\frac{1}{3} \quad |2 \cdot 3 - 5| = 2 - 3$$

$$\left| 2 \cdot 2\frac{1}{3} - 5 \right| = -\frac{1}{3} \quad |2 \cdot 3 - 5| = -1$$

В двух случаях получили, что значение модуля меньше 0, а такого быть не может по определению модуля. Отсюда следует, что $x = 2\frac{1}{3}$ и $x = 3$ не могут быть решением данного уравнения [39].

Ответ: решений нет.

Пример 2. Решить уравнение: $|3x - 5| = |5 - 2x|$

Решение: При раскрытии модулей данного уравнения по определению модуля мы должны рассмотреть четыре случая. Но мы упростим и раскроем модули по свойству модуля [39].

$3x - 5 = 5 - 2x$	и	$3x - 5 = -(5 - 2x)$
$3x + 2x = 5 + 5$		$3x - 2x = -5 + 5$
$5x = 10$		$x = 0$
$x = 2$		

Проверяем полученные корни при помощи подстановки в данное уравнение:

$ 3 \cdot 2 - 5 = 5 - 2 \cdot 2 $	$ 3 \cdot 0 - 5 = 5 - 2 \cdot 0 $
$ 6 - 5 = 5 - 4 $	$ -5 = 5 $
$1 = 1$, верно	$5 = 5$, верно

Ответ: $x = 0$, $x = 2$.

Пример 3. Решить уравнение: $||x - 1| - 1| = 2$

Решение: Раскрываем внешний модуль по определению.

$ x - 1 - 1 = 2$	$ x - 1 - 1 = -2$
$ x - 1 = 3$	$ x - 1 = -1$

Теперь ещё раз раскрываем

модуль $x - 1 = 3$, $x = 4$

$$x - 1 = -3, x = -2$$

Такого быть не может

по определению модуля

отсюда следует, что

решений в этом случае нет.

Проверяем полученные корни при помощи подстановки в данное уравнение.

$$||4-1|-1|=2$$

$$||-2-1|-1|=2$$

$$||3|-1|=2$$

$$||-3|-1|=2$$

$$|3-1|=2$$

$$|3-1|=2$$

$$|2|=2$$

$$|2|=2$$

$$2=2, \text{ верно}$$

$$2=2, \text{ верно}$$

Ответ: $x = 4, x = -2$.

Такие уравнения формируют у обучающихся навык анализа решения уравнения. Данные уравнения показывают школьникам, что у уравнения могут появиться посторонние корни, а возможно и не быть решений. Исходя из этого, у обучающихся формируется принцип решения таких уравнений [39].

Следующий вид уравнений чаще всего изучается в 8 - 9 классах. В этих уравнениях также используется определение модуля при его раскрытии, но уже само подмодульное выражение усложнённое.

Пример 4. Решить уравнение: $|x^2 + 3x - 2| = 2$

Решение: Раскрываем модуль по определению модуля

$$x^2 + 3x - 2 = 2$$

и

$$x^2 + 3x - 2 = -2$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$x^2 + 3x = 0$$

$$x_1 = -4; x_2 = 1$$

$$x(x + 3) = 0$$

$$x_3 = 0; x_4 = -3$$

Так как в правой части постоянное положительное число, то посторонних корней не возникает.

Ответ: $x_1 = -4; x_2 = 1; x_3 = 0; x_4 = -3$.

Чтобы решить уравнения, имеющие переменную в подмодульном выражении пользуются методом интервалов. Данный метод заключается в том, что в первую очередь необходимо отыскать те значения подмодульного выражения, которые обращают эти выражения в 0. Эти корни или точки разделяют ОДЗ (область допустимых значений) на промежутки. И в них то выражение, которое стоит под знаком модуля знак не меняется. А далее данное

уравнение проверяют на всех промежутках, применяя правило раскрытия модуля [31].

Пример 5. Решить уравнение: $|x - 2| + |0,5x + 3| = 7$

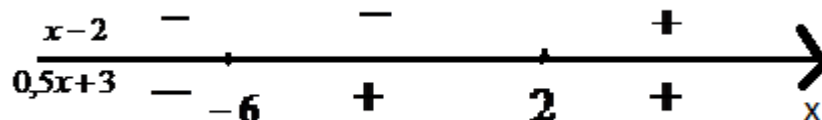
Решение: Данное уравнение можно решить, раскрывая модуль по определению, но придётся рассматривать 4 разных случая. Поэтому более рационально использовать в данном случае метод интервалов [31].

Область допустимых значений: x - любое число.

Находим те значения подмодульного выражения, которые обращают эти выражения в 0.

$$\begin{array}{lll} x - 2 = 0 & \text{и} & 0,5x + 3 = 0 \\ x = 2 & & x = -6 \end{array}$$

Получаем, что эти точки разбивают область допустимых значений на три промежутка. Теперь на полученных промежутках определяем знаки подмодульных выражений [39]. Чтобы это сделать, необходимо выбрать любое число из нужного интервала и подставить его в выражения $x - 2$ и $0,5x + 3$ и далее нужно заполнить табличку.



Если значение выражения на некотором интервале получилось отрицательное, то над этим интервалом ставим знак $-$ и для значения x из этого интервала записываем выражение противоположное подмодульному, а если значение выражения на некотором интервале получилось положительное, то над этим интервалом ставим знак $+$ и для значения x из этого интервала записываем выражение идентичное подмодульному [31].

В данном примере область допустимых значений оказалась разбитой на 3 промежутка. Решим уравнение на каждом промежутке отдельно.

а) $x \in (-\infty; -6)$. Получаем:

$$-x + 2 - 0,5x - 3 = 7$$

$$-1,5x = 8$$

$$x = -5\frac{1}{3}; -5\frac{1}{3} \notin (-\infty; -6).$$

б) $x \in [-6; 2)$. Получаем:

$$-x + 2 + 0,5x + 3 = 7$$

$$-0,5x = 2$$

$$x = -4; -4 \in [-6; 2).$$

в) $x \in [2; +\infty)$. Получаем:

$$x - 2 + 0,5x + 3 = 7$$

$$1,5x = 6$$

$$x = 4; 4 \in [2; +\infty).$$

Ответ: $x_1 = -4; x_2 = 4$.

Для того, чтобы решить уравнение или неравенство с модулем также используют метод возведения в квадрат их обеих частей [33].

Это основано на свойстве модулей: $|a|^2 = a^2$.

Здесь необходимым условием является то, чтобы обе части уравнения (неравенства) были неотрицательны [40].

Решая уравнение, которое имеет модуль, следует его раскрыть. Чтобы к этому прийти нужно и правую и левую части уравнения возвести во вторую степень [33].

Данный метод решения подходит не для всех типов уравнений и неравенств.

Рассмотрим этот метод на примерах:

Пример 6. Решить уравнение: $|x + 4| = 2x - 10$.

Решение: Возведём правую и левую части уравнения во вторую степень.

$$x^2 + 8x + 16 = 4x^2 - 40x + 100;$$

$$3x^2 - 48x + 84 = 0;$$

Умножим полученное уравнение на $\frac{1}{3}$.

$$x^2 - 16x + 28 = 0;$$

Решаем это уравнение и находим его корни.

$$x_1 = 14; x_2 = 2.$$

Условие равносильности преобразований:

$$2x - 10 \geq 0;$$

$$2x \geq 10;$$

$$x \geq 5.$$

Проверяем выполняется ли, для полученных значений, условие равносильности преобразований [21].

$$x_1 = 14; 14 \in [5; +\infty); x_2 = 2; 2 \notin [5; +\infty).$$

Ответ: $x = 14$.

Пример 7. Решить неравенство: $|2x - 1| > |x + 2|$.

Решение: Данное неравенство будет равносильно следующему.

$$(2x - 1)^2 > (x + 2)^2 \text{ [21];}$$

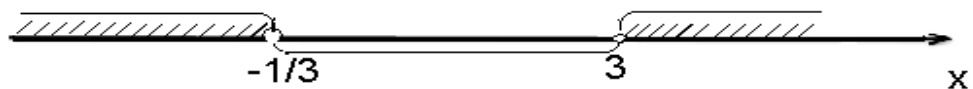
А уже полученное неравенство можно преобразовать следующим образом:

$$(2x - 1)^2 - (x + 2)^2 > 0;$$

$$(2x - 1 - x - 2)(2x - 1 + x + 2) > 0;$$

$$(x - 3)(3x + 1) > 0.$$

Находим решение неравенства методом интервалов и получаем:



Ответ: $(-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (3; +\infty)$.

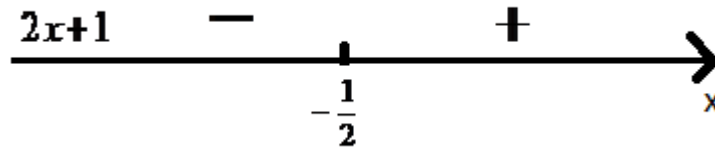
Пример 8. Решить неравенство: $|2x + 1| < 1$

Область допустимых значений: \mathbb{R} .

Находим значение x , которое обращает подмодульное выражение в 0:

$$2x + 1 = 0, x = -\frac{1}{2} \text{ [33].}$$

Получаем, что эта точка разбивает область допустимых значений на два промежутка. Решим неравенства для каждого промежутка.



а) $x \in (-\infty; -\frac{1}{2})$. Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} x < -\frac{1}{2} \\ -2x - 1 \geq 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x < -\frac{1}{2} \\ x \geq -1 \end{cases}.$$

Решением системы является интервал: $\left[-1; -\frac{1}{2}\right)$.

б) $x \in [-\frac{1}{2}; +\infty)$. Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 2x + 1 < 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x < 0 \end{cases}.$$

Решением системы является интервал: $\left[-\frac{1}{2}; 0\right)$.

Объединим полученные решения.

$$\left[\begin{cases} x < -\frac{1}{2} \\ x \geq -1 \end{cases} ; \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x < 0 \end{cases} \right.$$

Ответ: $(-1; 0)$.

Пример 9. Решить неравенство: $|x + 4| \geq 1$.

1 способ решения

Область допустимых значений: \mathbb{R} .

Находим значение x , которое обращает подмодульное выражение в 0:

$$x + 4 = 0, x = -4.$$

Получаем, что эта точка разбивает область допустимых значений на два промежутка. Решим неравенства для каждого промежутка [21].

а) $x \in (-\infty; -4)$. Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} x < -4 \\ -x - 4 \geq 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x < -4 \\ x \leq -5 \end{cases}.$$

Решением системы является интервал: $(-\infty; -5]$

б) $x \in [-4; +\infty)$. Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} x \geq -4 \\ x + 4 \geq 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geq -4 \\ x \geq -3 \end{cases}.$$

Решением системы является интервал: $[-3; +\infty)$.

Объединим полученные решения. Имеем: $x \leq -5$ и $x \geq -3$.

Ответ: $(-\infty; -5] \cup [-3; +\infty)$.

2 способ решения (используя, геометрическую интерпретацию модуля).

Данное неравенство $|x + 4| \geq 1$ равносильно следующему.

$$\begin{cases} x + 4 \geq 1 \\ x + 4 \leq -1 \end{cases};$$

Решаем каждое неравенство.

$$\begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq -5 \end{cases}.$$

Далее объединяем, полученные решения неравенств.

Получаем: $(-\infty; -5] \cup [-3; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -5] \cup [-3; +\infty)$.

Существует способ приближённого решения подобных уравнений и неравенств - графический. Для его реализации необходимо умение выполнять построение графиков функций, содержащих неизвестное под знаком модуля.

Пример 10. Построить график $y = |x - 2|$.

1) Для построения графика преобразуем выражение для y , раскрыв по определению модуль выражения функции.

$$y = |x - 2| \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 2, \text{ если } x \geq 0 \text{ (I);} \\ y = -x + 2, \text{ если } x < 0 \text{ (II).} \end{cases}$$

2) Построение при помощи геометрических преобразований графиков.

а) Строим график функции $y = |x - 2|$.

Чтобы построить график функции $y = |x - 2|$, нужно построить график $y = x - 2$, это график прямой, он пересекает ось ОХ и ось ОУ [12].

б) График, который находится ниже оси Ох отражаем вверх, симметрично оси Ох.

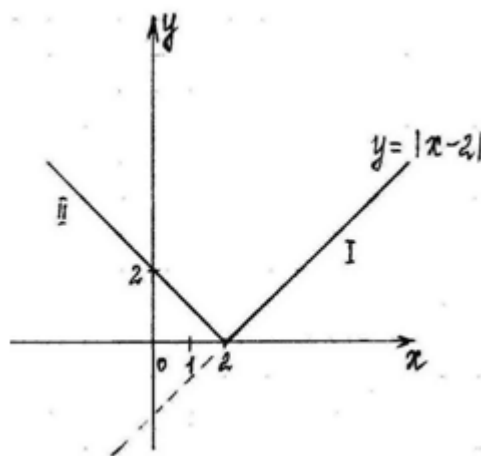


Рис. 5. График функции $y = |x - 2|$

2.3. Разработка элективного курса по теме: «Решение уравнений и неравенств с модулем».

Данный курс предназначен для обучающихся 9 - х классов. Содержание этого курса направлено на регулярное изучение данных материалов по теме модуль. В связи с тем, что в школьном курсе с модулем знакомятся в 6 классе и дальнейшее изучение этой темы затрагивается крайне мало и не в должном объеме.

В тот период, когда обучающиеся начнут знакомиться с данным курсом они смогут алгоритмизовать то или иное задание, также научатся подбирать методы для решения уравнений и неравенств с модулем [34].

При использовании этой разработки возможно повысить качество знаний у обучающихся в главных разделах математики и сформировать логичность действий, а также свободное владение решением уравнений и неравенств с модулем [38].

Название элективного курса: «Изучаем. Понимаем. Решаем» (методы решения уравнений и неравенств с модулем).

Класс(ы): 9

Предмет: алгебра.

Количество часов, предназначенных на элективный курс: 12 часов.

Цели :

1. Научить обучающихся основам работы по решению уравнений и неравенств с модулем.
2. Углубить умения и навыки по данному вопросу.
3. Заинтересовать обучающихся в дальнейшем изучении предмета.
4. Расширить творческие и интеллектуальные способности у обучающихся.

Задачи:

1. Познакомить с историей понятия модуля.
2. Напомнить основные теоретические аспекты и свойства модуля действительных чисел.
3. Сформировать деятельностный подход при решении уравнений и неравенств с модулем.
4. Обучить обучающихся работать с учебной литературой по математике.
5. Сплотить обучающихся при совместном решении задачи.

Предполагаемые результаты:

1. Обучающиеся смогут изучить свойства модуля.
2. Обучающиеся научатся применять различные методы при решении уравнений и неравенств с модулем.

3. Обучающиеся овладеют методами построения различных функций, содержащих модуль.

4. Обучающиеся смогут анализировать поставленные задачи.

5. Обучающиеся научатся выбирать более подходящие методы для решения уравнений и неравенств с модулем.

Содержание курса (12 часов)

1) Модуль числа определения и свойства. Раскрытие подмодульного выражения по определению модуля.

2) Построение функций и решение уравнений (неравенств) с модулем графическим методом.

3) Решение уравнений и неравенств с модулем методом интервалов.

4) Решение уравнений и неравенств, повышенной сложности (с параметрами).

Таблица 1

Тематическое планирование

№	Тема урока	Кол - во часов.
1	Решение уравнений и неравенств с использованием определения модуля.	2
2	Использование метода возведения в квадрат уравнений и неравенств с модулем.	1
3	Решение уравнений (неравенств), содержащих квадратный трёхчлен под знаком модуля.	1
4	Решение уравнений и неравенств с модулем методом интервалов.	2
5	Графические методы решения.	3
6	Решение уравнений и неравенств, повышенной сложности (с параметрами).	2
7	Контрольная работа	1

На основании письма №03 - 412 Министерства Образования и Науки Российской Федерации от 4.03.2010 г. элективные курсы проводятся в обра-

зовательных школах для 9 - 11 классов. Необходимо, чтобы были выделены дни (1 в неделю), в которые организуются элективные занятия. А на основании письма №03 - 413 Министерства Образования и Науки Российской Федерации от 4.03.2010 г. объём часов, предоставленных для проведения элективных занятий может быть: от 12 - 20 и 68 - 70 и более часов [28].

Длительность пробных элективных курсов осуществляется в течение одной четверти. Элективные курсы профильного направления осуществляются в течение от одной четверти и до 2 - х лет [27].

1 урок

Первый урок является вводным уроком. На данном уроке преподаватель даёт некоторую историческую справку для ознакомления с модулем. Также вводятся понятия и свойства модуля.

Само определение «модуль» уходит корнями из латинского названия *modulus*, что на русский язык переводится слово как «мера». Понятие модуль числа имеет иное название - абсолютная величина. Было принято обозначать абсолютную величину (модуль) в виде $| |$ [17].

Имеется утверждение, что термин предложил использовать английский математик и философ Роджер Котс. Он являлся учеником Ньютона [17].

Еще одним кто использовал понятия модуля был Готфрид Вильгельм Лейбниц и обозначал его как: $\text{mol } x$.

И уже окончательное обозначение абсолютной величины в 1841 году ввел Карл Теодор Вильгельм Вейерштрассе, который являлся немецким математиком [32].

Прежде чем знакомить обучающихся с модулем числа необходимо с ними обговорить вопрос о геометрическом расположении точек, рассмотреть точки симметричные относительно этих же точек.

Для этого выполнить задание:

Отыскать такую точку, чтобы она была симметричной 0 на числовой оси. Точки: +7; -6; -0,3; +1,4.

Для того, чтобы начать изучение определения модуля обучающиеся должны чётко представлять числа положительные, отрицательные и им противоположные. Они должны понимать, что запись $-a$ означает «число, противоположное числу a » и может обозначать как положительное, так и отрицательное число, а также число 0 [7].

Например: Какое будет число $-a$? Если 1) a - положительное число; 2) a - число отрицательное.

Далее обучающимся даётся определение модуля.

Определение. Модуль числа - это либо само число a , если a - положительное действительное число (т.е. $|a| = a$), либо число $-a$, противоположное числу a , если a - отрицательное действительное число (т.е. $|a| = -a$), либо 0, если $a = 0$ [11].

Выше изложенное определение записывают в виде:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{при } a \geq 0 \\ -a, & \text{при } a < 0 \end{cases}, \text{ данная запись понимается как } |a| = a, \text{ если } a \geq 0,$$

$$|a| = -a, \text{ если } a < 0 \text{ [11].}$$

Для лучшей проработки определения модуля рассматриваются примеры:

Задание 1.

$$|9| = 9;$$

$$|-7| = -(-7) = 7;$$

$$|\sqrt{5} - 3| = -(\sqrt{5} - 3) = 3 - \sqrt{5}, (\text{т.к. } \sqrt{5} - 3 < 0).$$

Чтобы подвести обучающихся к решению уравнений с модулем нужно предложить задания на нахождение значения x .

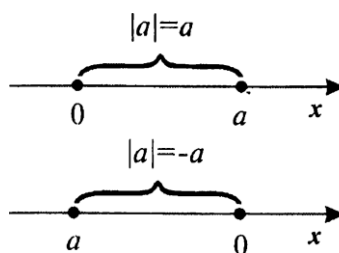
Задание 2. Найти значение x , чтобы получилось верное равенство.

$$а) |x| = 2; б) |x| = \frac{3}{7}; в) |x| = 2,75; г) |x| = -7.$$

Ответ: а) $x = \pm 2$; б) $x = \pm \frac{3}{7}$; в) $x = \pm 2,75$; г) решений нет.

Выполнив такого рода задания, у обучающихся выстраиваются действия по решению уравнений.

Далее педагог поясняет на доске геометрический смысл модуля.



Так как для модуля характерен ряд свойств. Преподаватель рассматривает эти свойства [20].

1. $|a| \geq 0$; так как модуль - это расстояние, а значит оно не может оказаться отрицательным.

2. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$;

3. $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$, если $b \neq 0$;

4. $|a + b| \leq |a| + |b|$;

5. $|a + b| = |a| + |b|$ тогда и только тогда, когда $ab \geq 0$;

6. $|a + b| = a + b$ тогда и только тогда, когда $a \geq 0$ и $b \geq 0$;

7. $|a - b| \leq |a| + |b|$;

8. $|a - b| = |a| + |b|$ тогда и только тогда, когда $ab \leq 0$;

9. $|a| - |b| \geq 0$ тогда и только тогда, когда $a^2 - b^2 \geq 0$.

10. $|a|^2 = a^2$;

11. $|a| = |-a|$.

Необходимо отработать основные свойства модуля на примерах.

Задание 3.

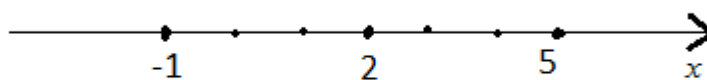
1) $2 + \sqrt{5} - \sqrt{(\sqrt{5} - 3)^2}$; 2) $\sqrt{(2 - \sqrt{7})^2} + \sqrt{7} + 2$;

На следующем этапе урока преподаватель даёт задания, которые включают в себя и геометрический смысл модуля, и решение простейших уравнений.

Задание 4. Решить уравнения.

$$а) |x - 2| = 3; \quad б) |x + 3,2| = 2; \quad в) |x - \sqrt{2}| = 0.$$

Решение: а) Будем рассматривать данное уравнение с геометрической точки зрения. На координатной оси необходимо найти значения x , так чтобы эти значения удовлетворяли условию $\rho(x; 2) = 3$. Получаем, что значения x расположены на расстоянии ($\rho = 3$) от точки 2 [21].



В ответе получаем два решения -1 и 5.

Решение: в) При решении данного уравнения $|x - \sqrt{2}| = 0$ можно не использовать геометрическую интерпретацию. Из определения известно, что $|a| = 0$, то $a = 0$. Получаем $x - \sqrt{2} = 0$, $x = \sqrt{2}$.

Ответ: $x = \sqrt{2}$.

Далее следует рассмотреть с обучающимися уравнения, направленные на отработку следующих действий [4]:

- преобразование выражения, используя свойства модуля;
- рассмотрение геометрической модели данного уравнения [4];
- представление на координатной оси.

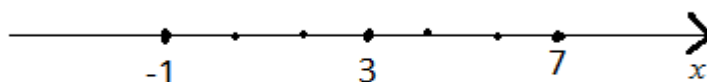
Задание 5. Решить уравнения.

$$а) |2x - 6| = 8; \quad б) |5 - 3x| = 6; \quad в) |4x + 1| = -2.$$

Решение: а) $|2x - 6| = |2(x - 3)| = |2| \cdot |x - 3| = 2|x - 3|$.

Данное уравнение необходимо преобразовать и тогда получим $2|x - 3| = 8$ и тогда будем иметь $|x - 3| = 4$.

Рассматриваем полученное уравнение с геометрической точки зрения. На координатной оси необходимо найти значения x , так чтобы эти значения удовлетворяли условию $\rho(x; 3) = 4$. Получаем, что значения x расположены на расстоянии ($\rho = 4$) от точки 3 [5].



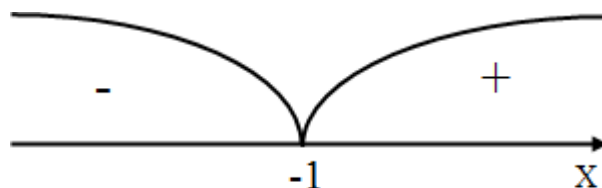
В ответе получаем два решения -1 и 7.

Далее рассматриваемые уравнения усложняются.

Задание 6. Решить уравнение. $|x+1| = 3x$.

Решение. 1) Находим корни подмодульного выражения. $x+1=0$, $x=-1$.

2) Получаем, что эта точка разбивает область допустимых значений на два промежутка. Разберём полученные промежутки.



$$3) \begin{cases} x < -1 \\ -(x+1) = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ 4x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x = -0,25 \end{cases} \text{ решений нет, так как}$$

$x = -0,25$ не принадлежит промежутку $x < -1$.

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x+1 = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x = 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0,5.$$

4) Объединяя решения уравнения, получаем результат.

Ответ: 0,5.

Далее с обучающимися необходимо отработать систему заданий, решая которые у них отрабатываются действия, такие как [4]:

- нахождение корня подмодульного выражения;
- разбиение на промежутки области значений [4];

- решение уравнения, при помощи раскрытия модуля по определению.

Задание 7. Решить уравнения

$$1) \quad |2x + 1| = 2x.$$

$$2) \quad |9x - 8| = 4x + 1.$$

$$3) \quad |3x + 1| + x = 9.$$

$$4) \quad |x^2 - 1| + x = 5.$$

Рассмотрим пример $|2x + 1| = 3x$.

Решение Раскрываем модуль по определению модуля

$$2x + 1 = 3x \quad \text{и} \quad 2x + 1 = -3x;$$

$$3x - 2x = 1 \quad 2x + 3x = -1;$$

$$x = 1 \quad 5x = -1;$$

$$x = -\frac{1}{5}.$$

Проверяем полученные значения подстановкой в данное уравнение.

$$|2 \cdot 1 + 1| = 3 \cdot 1 \quad \left| 2 \cdot \left(-\frac{1}{5} \right) + 1 \right| = 3 \cdot \left(-\frac{1}{5} \right);$$

$$|2 + 1| = 3 \quad \left| -\frac{2}{5} + 1 \right| = -\frac{3}{5};$$

$$|3| = 3 \quad \left| \frac{3}{5} \right| = -\frac{3}{5};$$

Во 2 - ом случае получили, что значение модуля меньше 0, а такого быть не может по определению модуля. Отсюда следует, что $x = -\frac{1}{5}$ не может

быть решением данного уравнения. Следовательно, имеем одно решение.

Ответ: $x = 1$.

Задание 8. Решить уравнения.

$$1) \quad |2x + 1| = |2x - 2|.$$

$$2) \quad |x + 5| = |10 + x|.$$

$$3) \quad |x| = |2x - 5|.$$

Можно сформулировать общую систему действий, которой должны пользоваться обучающиеся при решении уравнений с модулем [31].

- 1) Если есть необходимость, преобразовать уравнение, используя свойства модуля.
- 2) Попытаться сделать геометрическую интерпретацию.
- 3) Найти значение x , которое обращает подмодульное выражение в 0.
- 4) Раскрыть модуль по определению.
- 5) Проверить найденные значения.

При решении неравенств с модулем выполняются те же действия, что и при решении уравнений с модулем. Только отличительной чертой в решении уравнений является проверка найденных значений, а к решению неравенств следует применять равносильность.

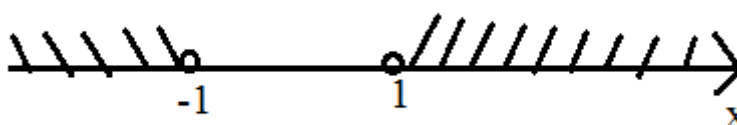
Задание 9. Решить неравенство: $|x^2 + 3| < 12$.

Решение: В результате того что $x^2 + 3 > 0$, то $|x^2 + 3| = x^2 + 3$. Из этого следует, что уравнение будет равносильно $x^2 + 3 < 12 \Leftrightarrow x^2 < 9 \Leftrightarrow |x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$.

Ответ: $(-3; 3)$.

Задание 9. Решить неравенство: $|x + 1| + |x - 1| > 2$.

Решение: Будем рассматривать данное неравенство с геометрической точки зрения. На координатной оси необходимо найти значения x , так чтобы сумма расстояний значений от -1 и 1 равнялась 2. Получаем, что значения x расположены на $[-1; 1]$. А нам нужны те значения для которых сумма расстояний > 2 .



Ответ: $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Следует решить такие неравенства:

$$1) |x^2 - 1| < |x + 1|;$$

$$2) |81x^4 - 16| > 81x^4 - 16;$$

$$3) |2x - |x - 2|| < 3.$$

Можно сформулировать общую систему действий, которой должны пользоваться обучающиеся при решении неравенств с модулем [31].

1) Если есть необходимость преобразовать неравенство, используя свойства модуля.

2) Попытаться сделать геометрическую интерпретацию.

3) Применить равносильность.

4) Найти значение x , которое обращает подмодульное выражение в 0 [31].

5) Раскрыть модуль по определению.

2 урок

На данном уроке педагог рассматривает метод возведения в квадрат уравнений(неравенств). Данный метод используется как альтернативный метод и позволяет достаточно быстро прийти к решению заданий с модулями.

Преподаватель говорит, что суть возведения уравнения во вторую степень сводится к такому виду:

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) = g^2(x) \Leftrightarrow (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) = 0 \Leftrightarrow f(x) = \pm g(x)$$

[11].

Поэтому для удобства обучающемуся следует решать таким образом:

$$|f(x)| = |g(x)| = f(x) = \pm g(x) [11].$$

Задание 1. Решить уравнение $|x^2 - 3| = |1 - 3x|$.

Решение: Следует обратить внимание обучающихся на то, что если бы мы решали данное уравнение по определению модуля нам нужно было бы рассматривать четыре случая. А в данном случае пример решится быстрее.

$$|x^2 - 3| = |1 - 3x| \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3 = 1 - 3x, \\ x^2 - 3 = -1 + 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 4 = 0, \\ x^2 - 3x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1, x_2 = -4, \\ x_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 1, x_2 = -4, x_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$.

После рассмотрения метода возведения в квадрат, необходимо ввести и показать ещё три распространённых способа для решения уравнений (неравенств) с модулем. Главным условием является то, что a постоянная [11].

$$1) |f(x)| = a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \pm a, \\ a \geq 0. \end{cases}$$

$$2) |f(x)| > a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > a, \\ f(x) < -a. \end{cases}$$

$$3) |f(x)| < a \Leftrightarrow -a < f(x) < a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < a, \\ f(x) > -a. \end{cases}$$

При решении уравнений (неравенств) с модулем этими способами, есть возможность возвести во вторую степень или рассмотреть геометрический смысл уравнений (неравенств).

Задание 2. Решить неравенство $\left| \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} \right| \leq 1$.

$$\left| \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} \right| \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} \leq 1, \\ \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-6x}{(x+1)(x+2)} \leq 0, \\ \frac{2x^2 + 4}{(x+1)(x+2)} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-2; -1) \cup [0; +\infty), \\ x \in (-\infty; -2) \cup (-1; +\infty) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x \in [0; +\infty)$.

Ответ: $[0; +\infty)$.

Следует решить с обучающимися:

Задание 3. Решить уравнение: $|5x - |x| - 2| = 1$.

Задание 4. Решить уравнение: $||x - 9| - 11| \leq 10$.

3 урок

На данном уроке преподаватель рассматривает тему: «Решение уравнений (неравенств), содержащих квадратный трёхчлен под знаком модуля».

К этому времени у обучающихся уже сформированы навыки по решению квадратных трёхчленов и они уже умеют находить решения квадратных уравнений [9].

Задание 1. Решить неравенство $|x^2 - 2x - 6| > 9$.

Решение: раскрываем модуль по определению.

$$|x^2 - 2x - 6| > 9; \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 6 > 9, \\ x^2 - 2x - 6 < -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 15 > 0, \\ x^2 - 2x + 3 < 0. \end{cases}$$

Неравенство $x^2 - 2x + 3 < 0$ не имеет решений. А неравенство $x^2 - 2x - 15 > 0$ приводим к виду $(x + 3)(x - 5) > 0$ [10].

Ответ: $x \in (-\infty; -3) \cup (5; +\infty)$.

Задание 2. Решить неравенство $|x - 6| > |x^2 - 5x + 9|$.

Решение: Данное неравенство имеет вид $|f(x)| > |g(x)|$. По свойству модуля мы можем записать его так: $f(x)^2 > g(x)^2$. Немного преобразовав получим: $f(x)^2 - g(x)^2 > 0$; $(f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) > 0$.

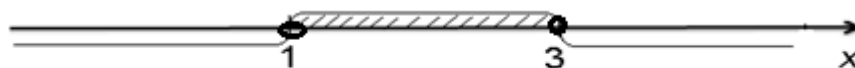
$$|x - 6| > |x^2 - 5x + 9| \Leftrightarrow (x - 6)^2 > (x^2 - 5x + 9)^2$$

Переносим всё в правую часть $(x^2 - 5x + 9)^2 - (x - 6)^2 < 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 5x + 9 - x + 6)(x^2 - 5x + 9 + x - 6) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 6x + 15)(x^2 - 4x + 3) < 0.$$

В связи с тем, что $x^2 - 6x + 15 > 0$ для всех x , то получаем равносильность $x^2 - 4x + 3 < 0$. Решаем полученное неравенство [10].



Ответ: $(1; 3)$.

Задание 3. Решить уравнения

1) $|x^2 - x - 5| = 1$.

2) $|x^2 - 8x + 5| = |x^2 - 5|$.

При решении уравнений (неравенств) с модулем следует обращать внимание обучающимся на количество заданных модулей. Если модулей два и больше, то следует использовать для решения уравнений (неравенств) метод интервалов, который значительно упростит решение. А если модуль один, то можно раскрыть его по определению модуля [9].

Тема следующего занятия: «Решение уравнений и неравенств с модулем методом интервалов».

Обучающимся необходимо дать алгоритм решения:

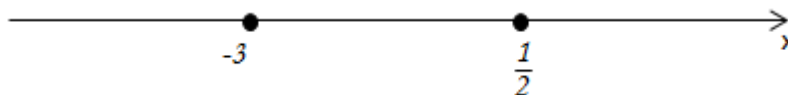
- 1) Найти те значения подмодульного выражения, которые обращают эти выражения в 0.
- 2) Разбить область допустимых значений на промежутки, учитывая количество точек.
- 3) На полученных промежутках определить знаки подмодульных выражений.
- 4) Раскрыть модули, учитывая знаки подмодульных выражений.
- 5) Найти решения для получившихся уравнений (неравенств).

Задание 1. Решить уравнение: $|x + 3| - |2x - 1| = 1$.

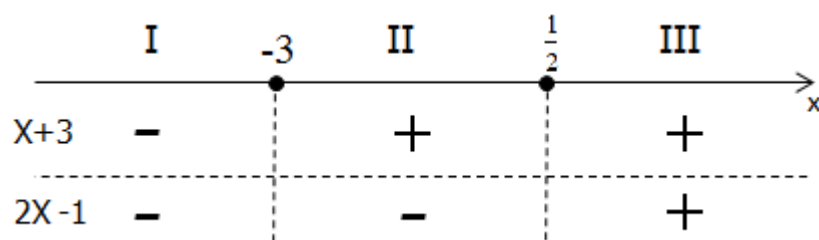
- 1) Находим корни выражений, стоящих под знаком модуля.

$$\begin{cases} x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \\ 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

- 2) Отмечаем полученные корни на числовой оси.



- 3) Получаем, что эти точки разбивают область допустимых значений на три промежутка. Отмечаем у каждого интервала тот знак, который получается у выражений, стоящих под знаком модуля. Разберём полученные промежутки.



4) А далее записываем каждый промежуток, применяя правило раскрытия модуля, и решаем полученное уравнение.

а) $x \in (-\infty; -3)$ Получаем

$$-x-3-(-2x+1)=1;$$

$$-x-3+2x-1=1;$$

$x=5 \notin (-\infty; -3)$ - не подходит.

б) $x \in [-3; \frac{1}{2})$ Получаем

$$x+3-(-2x+1)=1;$$

$$x+3+2x-1=1;$$

$$3x=-1;$$

$x=-\frac{1}{3} \in [-3; \frac{1}{2})$ - подходит.

в) $x \in [\frac{1}{2}; +\infty)$ Получаем

$$x+3-(2x-1)=1;$$

$$x+3-2x+1=1;$$

$x=3 \in [\frac{1}{2}; +\infty)$ - подходит.

Ответ: $x_1 = -\frac{1}{3}; x_2 = 3$.

Задание 2. Решить уравнение: $|x-4|+|x+3|-|x-6|=2$.

Решение: 1) Находим те значения подмодульного выражения, которые обращают эти выражения в 0.

$$\begin{cases} x-4=0 \Rightarrow x=4 \\ x+3=0 \Rightarrow x=-3. \\ x-6=0 \Rightarrow x=6 \end{cases}$$

2) Получаем, что эти значения разбивают область допустимых значений на четыре промежутка. Отмечаем у каждого интервала тот знак, который получается у выражений, стоящих под знаком модуля. Разберём полученные промежутки.

$x-4$	-	-3	-	4	+	6	+	
$x+3$	-		+		+		+	x
$x-6$	-		-		-		+	

$$\begin{cases} x \leq -3 \\ 4 - x - x - 3 + x - 6 = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x \leq -3 \\ x = -7 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = -7, \\ x = 1, \\ \text{нет решений}, \\ \text{нет решений}, \end{cases} \\
 \begin{cases} -3 < x \leq 4 \\ 4 - x + x + 3 + x - 6 = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} -3 < x \leq 4 \\ x = 1 \end{cases}, \\
 \begin{cases} 4 < x \leq 6 \\ x - 4 + x + 3 - 6 + x = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} 4 < x \leq 6 \\ x = 3 \end{cases}, \\
 \begin{cases} x > 6 \\ x - 4 + x + 3 + 6 - x = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x > 6 \\ x = -3 \end{cases}
 \end{matrix}$$

Ответ: -7; 1

Задание 3. Решить уравнение: $x^2 + 1 + |x - 1| = 2|x|$.

Решение: $|x - 1| - 2|x| = -x^2 - 1$.

1) Находим те значения подмодульного выражения, которые обращают эти выражения в 0.

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1. \\ 2x = 0 \Rightarrow x = 0. \end{cases}$$

2) Получаем, что эти точки разбивают область допустимых значений на три промежутка. Отмечаем у каждого интервала тот знак, который получается у выражений, стоящих под знаком модуля. Разберём полученные промежутки.

	I	0	II	1	III	
$x-1$	-		-		+	x
$2x$	-		+		+	

3) А далее записываем каждый промежуток, применяя правило раскрытия модуля, и решаем полученное уравнение.

а) $x \in (-\infty; 0)$ Получаем

$$-x + 1 - 2(-x) = -x^2 - 1;$$

$$x^2 + x + 2 = 0;$$

$D < 0$, решений нет.

б) $x \in [0; 1)$ Получаем

$$-x + 1 - 2x = -x^2 - 1;$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0;$$

$x_1 = 1, x_2 = 2$; $1 \notin [0; 1)$, $2 \notin [0; 1)$ не подходит.

в) $x \in [1; +\infty)$ Получаем

$$x - 1 - 2x = -x^2 - 1;$$

$$x^2 - x = 0;$$

$x_1 = 0, x_2 = 1$; $0 \notin [1; +\infty)$, $1 \in [1; +\infty)$.

Ответ: 1.

Задание 4. Решить неравенство: $|x^2 - 2x - 3| \geq 2|x|$.

Решение: 1) Находим те значения подмодульного выражения, которые обращают эти выражения в 0. Это будут значения: $x_1 = 3, x_2 = -1, x_3 = 0$.

Эти значения разбивают область допустимых значений на четыре промежутка $(-\infty; -1), [-1; 0), [0; 3), [3; +\infty)$. Отмечаем у каждого интервала тот знак, который получается у выражений, стоящих под знаком модуля. И рассматриваем неравенство на всех полученных промежутках.

Решением первого промежутка является: $(-\infty; -\sqrt{3}]$

Решением второго промежутка является: $2 - \sqrt{7} \leq x \leq 0$.

Решением третьего промежутка является: $0 \leq x \leq 3$

Решением четвёртого промежутка является: $x \geq 2 + \sqrt{7}$.

Ответ: $(-\infty; -\sqrt{3}] \cup [2 - \sqrt{7}; \sqrt{3}] \cup [2 + \sqrt{7}; +\infty)$

Рассмотренный метод интервалов на данных примерах приведён, для того, чтобы показать как универсален данный метод. Им можно решать как уравнения, так и неравенства, содержащие модуль, также он позволяет найти решения практически к любой задаче, содержащей модуль [11].

Приведённый метод позволяет нам включать в решение знакомый алгоритм действий необуславливая сложностью представляемой задачи и, что значимо для обучающихся, приобретать, исходя из этого, результаты решения [11].

У обучающихся данным видом задач можно проверить умение решать уравнения и умение раскрывать модуль в подмодульных выражениях.

5 урок

Тема урока: «Графические методы решения».

Преподаватель предлагает рассмотреть построение разнообразных графиков функций с модулем.

В начале преподавать даёт обучающимся опорную информацию о графиках с модулем.

1) График $y = |f(x)|$.

Необходимо данную функцию свести к виду:

$$y = \begin{cases} f(x), & \text{при } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{при } f(x) < 0 \end{cases}.$$

Т.е. для того, чтобы построить график $y = |f(x)|$ необходимо в первую очередь построить $y = f(x)$, а потом то что ниже оси ОХ отразить вверх симметрично [23].

2) График $y = f(|x|)$.

Так как функция $y = f(|x|)$ чётная, то этот график располагается симметрично оси ОУ. В результате этого нужно просто построить график $y = f(x)$, при условии $x \geq 0$ и то, что ниже оси ОУ отразить вверх симметрично [1].

3) График $y = |f(|x|)|$.

Для того, чтобы построить следующий график функции необходимо:

- построить график $y = f(x)$, при условии $x \geq 0$;
- то, что ниже отразить вверх симметрично оси ОУ [1];
- полученные кусочки графика снизу отразить вверх симметрично оси ОХ.

Для начала обучающимся следует построить следующие функции:

1) $y = |x - 2|$.

Необходимо построить график $y = x - 2$, а затем то что ниже оси ОХ отобразить вверх.

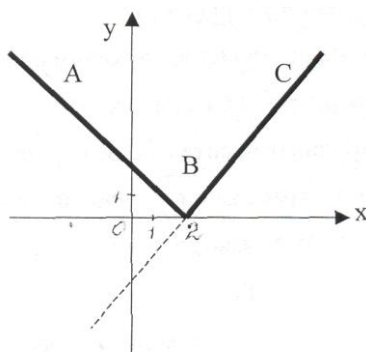


Рис. 6. График функции $y = |x - 2|$.

2) $y = |x^2 + x - 2|$.

Необходимо построить график $y = x^2 - 2x + 1$, $y = (x - 1)^2$ а затем то что ниже оси ОХ отобразить вверх [12].

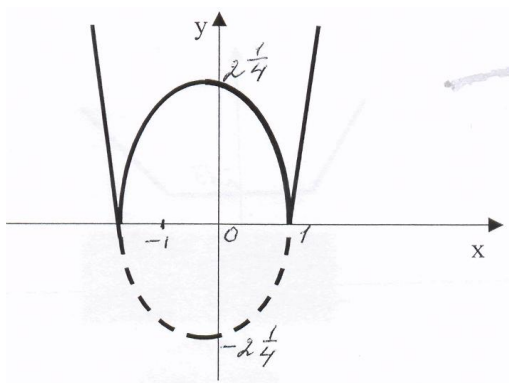


Рис. 7. График функции $y = |x^2 + x - 2|$.

Далее уже отрабатывается навык построения и графического решения заданий.

Задание 1. Решить графически уравнение: $|x-2|=3$.

Для начала строим графики функции $y=|x-2|$ и $y=3$

Чтобы построить график функции $y=|x-2|$, нужно построить график $y=x-2$, а это график прямой, он пересекает ось ОХ в точке $(2; 0)$, а ОУ в точке $(0; -2)$. То что видим ниже оси ОХ отражаем вверх [1].

Далее строим график функции $y=3$ - это прямая, которая проходит параллельно ОХ через точку $(0; 3)$ на ОУ.

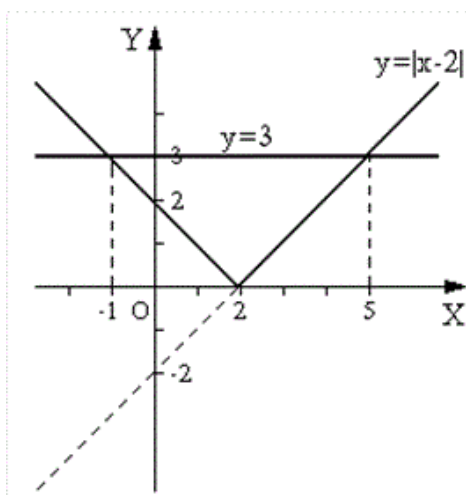


Рис. 8. Графическое представление $|x-2|=3$.

Решением будет являться пересечение 2 - х графиков функций $y=|x-2|$ и $y=3$. Ищем абсциссы полученных точек.

Ответ: $x_1 = -1; x_2 = 5$.

Задание 2. Решить графически уравнение: $1+|x|=0,5$.

Для начала необходимо преобразовать уравнение и тогда получим:
 $|x|=0,5-1; |x|=-0,5$ [12].

Строим график функции $y=|x|$ и $y=-0,5$.

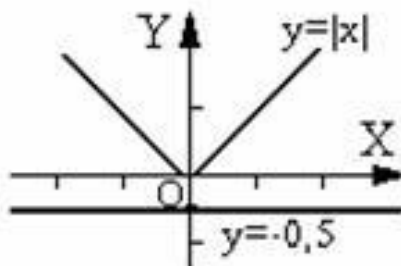


Рис. 9. Графическое представление решения $1 + |x| = 0,5$

Так как графики не имеют общих точек, то значит решений нет.

Ответ: решений нет.

Задание 3. Решить графически уравнение: $|x + 4| + |x - 3| - |x - 5| + |6 - x| = 12$.

На первом этапе решения нам нужно построить функции:

$$y = |x + 4| + |x - 3| - |x - 5| + |6 - x| \text{ и } y = 12$$

Чтобы построить функцию $y = |x + 4| + |x - 3| - |x - 5| + |6 - x|$ нужно найти те значения подмодульного выражения, которые обращают эти выражения в 0 и указать значение ординат [12].

$x + 4 = 0,$	$x_1 = -4,$	$y_1 = 8.$
$x - 3 = 0,$	$x_2 = 3,$	$y_2 = 8.$
$x - 5 = 0,$	$x_3 = 5,$	$y_3 = 12.$
$6 - x = 0,$	$x_4 = 6,$	$y_4 = 12.$

Находим 2 точки для $x > 6$ и $x < -4$.

$x_5 = 7,$	$y_5 = 14.$
$x_6 = -6,$	$y_6 = 12.$

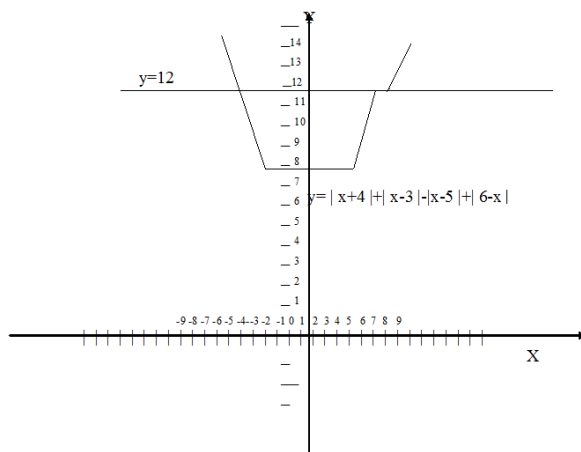


Рис. 10. Графическое представление решения $|x + 4| + |x - 3| - |x - 5| + |6 - x| = 12$.

Ответ: $x = -6; 5 \leq x \leq 6$.

6 урок

Тема урока: «Решение уравнений и неравенств, повышенной сложности (с параметрами)».

Преподаватель должен обратить внимание обучающихся на то, что иногда задания с модулями рациональнее решать графическим методом.

Задание 1. Для всех значений a найдите количество решений данного уравнения $|x^2 - 2x - 3| = a$.

Решение: Введём вспомогательную функцию $y = x^2 - 2x - 3$ (это парабола) Далее находим вершину параболы.

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1;$$

$$y_0 = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4.$$

Строим параболу и то, что видим выше оси ОХ выделяем, а то что ниже оси ОХ отражаем вверх и также выделяем. А прямая a - это совокупность прямых параллельных оси ОХ [12].

Расположив горизонтально линейку, начинаем проводить линии. Как только прямая совпадёт с осью ОХ, то это и будет решение.

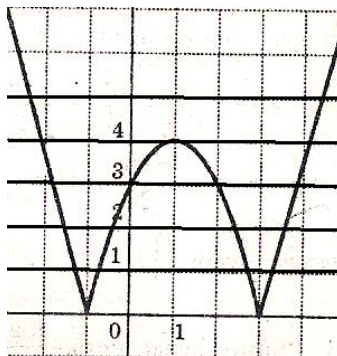


Рис. 11. Графическое представление решения $|x^2 - 2x - 3| = a$.

В ответе будем описывать выбранные ситуации.

Ответ: если $a = 0$, то 2 решения; если $0 < a < 4$, то 4 решения; если $a = 4$, то 3 решения; если $a < 0$, то решений нет; если $a > 4$, то 2 решения.

Задание 2. Для всех значений a найдите количество решений данного уравнения $x^2 - 6|x| + 5 = a$.

Решение: Введём вспомогательную функцию $y = x^2 - 6x + 5$ (это парабола с ветвями вверх) Далее находим вершину параболы: $x_0 = 3$; $y_0 = -4$. Строим график $y = x^2 - 6x + 5$.

Обратим внимание на то, что $x^2 = |x|^2$ и получаем функцию $y = |x|^2 - 6|x| + 5$. Раскрываем модули по определению модуля и строим график. При $x \geq 0$ строим эту часть, так как она уже есть, а при $x < 0$ строим график функции $y = x^2 + 6x + 5$. А прямая a - это совокупность прямых параллельных оси ОХ [12].

Расположив горизонтально линейку, начинаем проводить линии. Как только прямая совпадёт с осью ОХ, то это и будет решение.

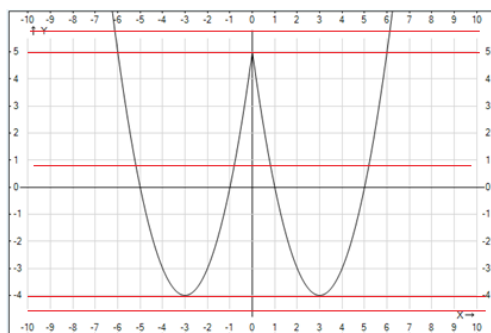


Рис. 12. Графическое представление решения $x^2 - 6|x| + 5 = a$.

В ответе будем описывать выбранные ситуации.

Ответ: если $a = -4$ и $a > 5$, то 2 решения; если $-4 < a < 5$, то 4 решения; если $a = 5$, то 3 решения; если $a < -4$, то решений нет.

Задание 3. Решить неравенство графическим методом $|2 - |x|| < a - x$.

Решение: Введём вспомогательную функцию и построим её $y = |2 - |x||$, используя все возможные методы избавления от знака модуля. А дальше строим $y = a - x$ и начинаем проводить линии, тем самым искать решения.

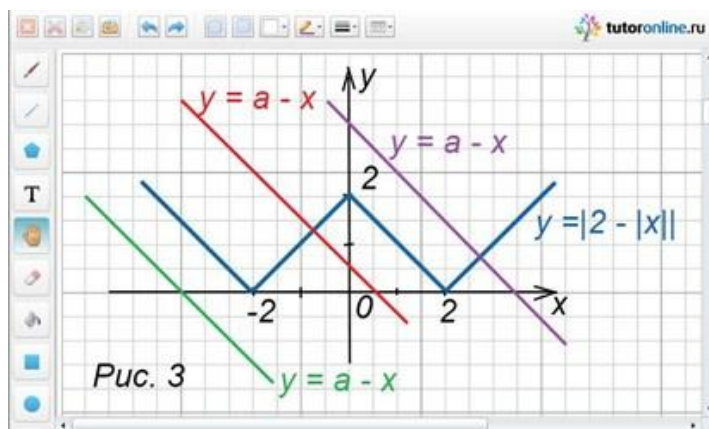


Рис. 13. Графическое представление решения $|2 - |x|| < a - x$.

В ответе будем описывать выбранные ситуации.

Ответ: если $a \leq -2$, то решений нет; $x \in (-\infty; (a-2)/2)$ при $a \in (-2; 2]$;
 $x \in (-\infty; (a+2)/2)$ при $a > 2$.

7 урок

Данный урок основан на проведении контрольной работы. Эта работа содержит в себе задания, по ранее изученным сведениям на элективном курсе.

Вариант 1

1) Решить уравнения:

а) $|2x - 8| = 10$;

б) $|3x + 6| = 2x$;

в) $|x^2 - 4x| = 4$;

г) $|x^2 - x - 5| = 1$.

2) Решить неравенства:

а) $|4x^2 - 1| < x + 2$;

б) $|x + 2| + |x - 2| > 4$.

3) Решить методом интервалов

а) $|x - 1| + |2x - 3| = 2$;

б) $|x^2 - 4x + 3| + |x^2 - 5x + 6| = 1$.

4) Решить графическим методом :

а) $|x - 3| = 4$;

б) $|x^2 - 5x + 6| = x - 3$.

5) Для всех значений a найдите количество решений данного уравнения $x^2 - |x| - 2 = a$.

Вариант 2

1) Решить уравнения

а) $|2x - 10| = 12$;

б) $|4x + 7| = 2x$;

в) $|3x^2 - x| = 8 + x$;

г) $|x^2 + x - 1| = 2x - 1$.

2) Решить неравенства:

а) $|3x - 2| > |2x + 1|$;

б) $|x + 3| + |x - 3| > 6$.

3) Решить методом интервалов

а) $|x^2 - x| = |2x - 2|$;

б) $|x - 3| + |x + 2| - |x - 4| = 3$.

4) Решить графическим методом :

а) $|x - 6| = 4$;

б) $|x^2 - 6x + 5| = x - 4$.

5) Для всех значений a найдите количество решений данного уравнения $x^2 - 3|x| + 2 = a$.

2.4 Конспект одного урока элективного курса

Тема урока: «Графические методы решения уравнений»

Тип урока: закрепление полученных знаний.

Класс: 9.

Цели урока:

1. Закрепить ранее полученные знания и умения, о графических методах решения уравнений.
2. Заинтересовать обучающихся в дальнейшем изучении предмета.
3. Воспитать в каждом обучающемся аккуратность при построении графиков функций.

Оборудование: доска, компьютер, проектор.

План урока:

1. Орг. момент - 2 мин.
2. Озвучивание темы занятия - 2 мин.
3. Актуализация знаний - 15 мин.
4. Закрепление пройденного материала - 20 мин.
5. Итог урока - 4 мин.
6. Домашняя работа - 2 мин.

Ход урока

1. Орг. момент.

Педагог всех приветствует и отмечает отсутствующих. Обучающиеся распределяются по их рабочим местам.

2. Озвучивание темы занятия.
3. Актуализация знаний.

В начале урока преподаватель опрашивает обучающихся. Задаёт вопросы такие как: Какие методы решения уравнений с модулем вы знаете? Расскажите алгоритм построения графиков с модулем.

Далее необходимо, чтобы обучающиеся вспомнили как строить графики функции с модулем. Для этого преподаватель при помощи облачного приложения Desmos подготавливает заготовку с заранее построенными графиками [9].

Преподаватель даёт задание: соотнести, представленные на экране графики функций с их формулами.

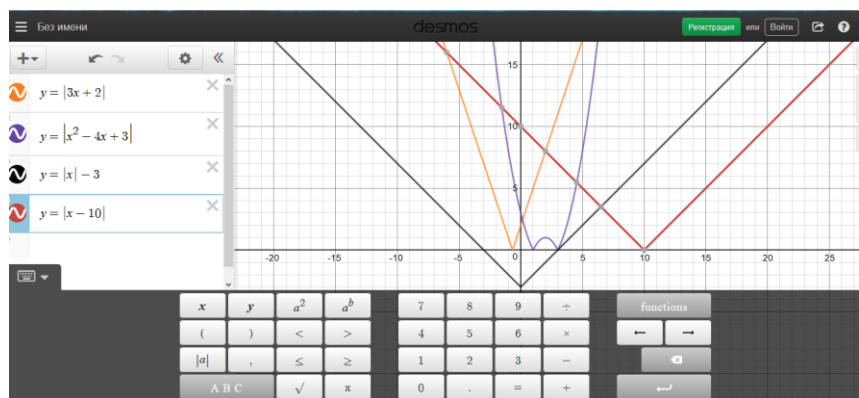


Рис. 14. Представление задания

Сами подписи к графикам преподаватель может скрыть. А формулы он может просто выписать на доску.

Далее обучающимся предлагается решить задание.

Задание 1. Построить графики функций:

1) $y = |x - 1| + |x - 2|$;

Получаем вот такой график

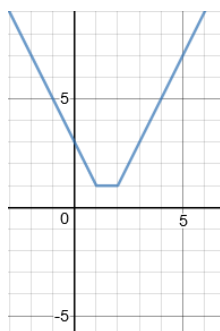


Рис. 15. Построение $y = |x - 1| + |x - 2|$

2) $y = |x^2 - 6x + 3|$.

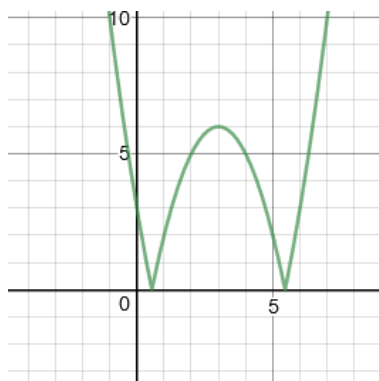


Рис. 15. Построение $y = |x^2 - 6x + 3|$

4. Закрепление пройденного материала.

На следующем этапе учебного процесса обучающимся предлагается задание. Ученик вызывается к доске и решает.

Задание 2. Решить графически уравнение:

$$|x + 3| = |x - 4|$$

Стоит обратить внимание, что нужно ввести вспомогательные функции $y = |x + 3|$ и $y = |x - 4|$ [30]

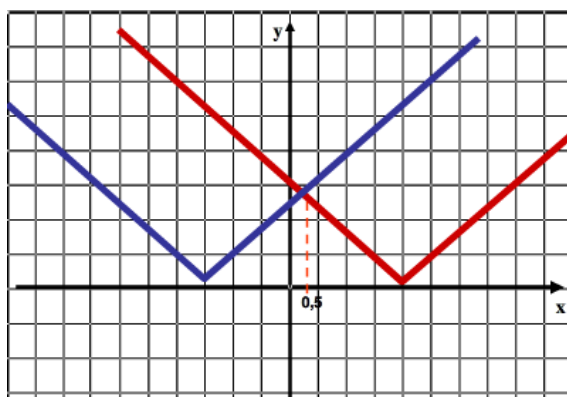


Рис. 16. Построение $|x + 3| = |x - 4|$

Решением является пересечение 2 – графиков.

Ответ: $x = 0,5$.

Задание 3. Решить графически уравнение:

$$1) |x - 2| = \sqrt{x};$$

$$2) |x|^2 - 4|x| + 3 = x - 1.$$

Далее можно предложить обучающимся решить задание с параметром.

Задание 4. Для всех значений a найдите количество решений данного уравнения $x^2 - 6|x| + 5 = a$.

Каждый обучающийся решает самостоятельно задание в тетради и, говорит получившийся ответ, а потом чтобы проверить результаты преподаватель показывает на интерактивной доске заранее построенный график.

Особенность в том, что преподаватель демонстрирует построение этих 2 - х графиков, а чтобы прийти к правильным ответам можно запустить движение прямой a , от расположения которой зависит количество решений данного уравнения. И это наглядно представляется на экране в виде движущейся

прямой и графиком $y = x^2 - 6|x| + 5$. И если кто - то из обучающихся допустил ошибку, то можно приостановить движение прямой и подробно обсудить ситуацию [13].

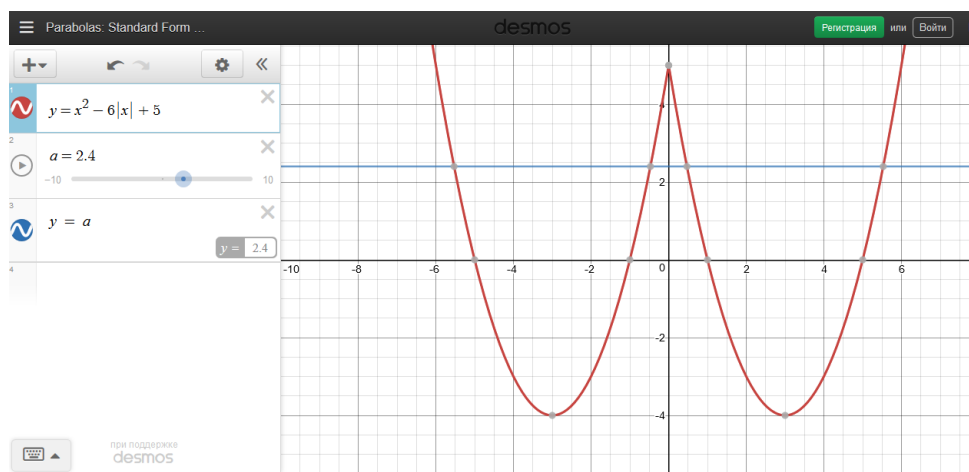


Рис. 17. Построение $x^2 - 6|x| + 5 = a$.

6. Итог урока.

Ребята, скажите какую тему сегодня изучали на уроке?

Что нового для себя узнали на уроке?

7. Домашняя работа.

Вспомнить, все методы решения уравнений с модулем.

Составить и решить одно задание, в котором нужно бы было решить графически уравнение

Выводы по второй главе

При работе с уравнениями и неравенствами в которых присутствует модуль, перед учащимися ставятся множество вопросов, для решения которых нужно использовать так называемые эвристические приемы, помогающие развитию личности в образовательной сфере. Данные задания способствуют развитию у обучающихся логического мышления и специфики применения способов решения задач. И все это ведет к тому, что обучающиеся,

владеющие множеством методов решения задач, с легкостью решают и другие примеры связанные с математикой.

Разработанный нами элективный курс используется для донесения информации до обучающихся. Мы использовали такие формы учебных занятий как: лекции, практикумы и семинары для отработки навыком. Во время проведения занятий самой лучшей работой является принцип «Учитель - Обучающийся», либо «Обучающийся - Учитель». Данный принцип основан на том, что каждый обучающийся включается в работу и тем самым усвоение информации происходит быстрее.

Целью этого курса является развитие личности обучающегося, вовлечение в учебно-познавательную деятельность и разрешение множества проблем при работе на уроках.

Содержание данного курса основано на проработке практического аспекта занятия во время которого обучающиеся решают множество различных задач. Данные задачи способствуют более детальному освоению методов и приемов решения уравнений и неравенств с модулем.

При проведении практикумов педагог выявляет способности и навыки каждого обучающегося. С каждым занятием задания усложняются, именно поэтому педагогу необходимо подбирать задания чтобы не перегружать обучающихся, так как переутомление ведет к ухудшению показателей успеваемости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Цель, поставленная для реализации данной работы, была изучить основные виды уравнений и неравенств с модулем и разработать элективный курс по обучению методам решения уравнений и неравенств с модулем.

По результатам, проанализированных учебных комплектов, можно сказать, что данная тема встречается разрозненно и не систематизировано. Поэтому мною был разработан элективный курс.

Во время создания элективного курса по алгебре нами было рассмотрено множество нормативных актов, согласно которым мы имеем право проводить данный курс в общеобразовательной школе. Согласно этим документам на элективный курс отводится специальное количество часов для освоения данного материала.

При разработке элективного курса нами были затронуты психолого-педагогические аспекты и специфика каждого обучающегося. Рассмотренный нами возраст обучающихся охарактеризован большой потребностью внимания и заинтересованности, в результате чего нужно внести в учебный процесс что-то интересное и новое.

В процессе проработки данной работы были разрешены определённые задачи:

1. Изучена научно-методическая литература по теме исследования.
2. Проанализирована история возникновения модуля числа.
3. Выявлены основные методы решения уравнений и неравенств с модулем.
4. Разработан элективный курс по теме: «Решение уравнений и неравенств с модулем».

ЛИТЕРАТУРА

1. Аксанова И.И. Элективный курс: «Решение уравнений и неравенств с модулем» [Электронный ресурс]. URL:<http://nsportal.ru/shkola/algebra/library/2015/04/20/elektivnyy-kurs-reshenie-uravneniy-i-neravenstv-s-modulem> (дата обращения: 12.04.2017).
2. Бабанский Ю.К. Методы обучения в современной общеобразовательной школе. - М.: Просвещение, 1985.
3. Блох А.Я., Гусев В.А., Дорофеев Г.В. и др. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика. - М.: Просвещение, 1987. - 416 с.
4. Боженкова Л.И. Алгебра в схемах, таблицах, алгоритмах: Учебные материалы. - Калуга: КГПУ, 2014. - 75 с.
5. Буцко Е.В. Математика: методическое пособие/ Е.В. Буцко и д.р. - М.: Вентана - Граф, 2013. - 285 с.
6. Виленкин Н.Я., Жохов В.И., Чесноков А.С., Шварцбурд С.И. Математика: учебник для 6 класса. - М.: МНМОЗИНА, 2014. - 288 с.
7. Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике. - М.: АСТ: Астрель, 2006. - 509 с.
8. Дорофеев Г.В., Петерсон Л.Г. Математика: учебник для 6 класса. Часть 2. - М.: ЮВЕНТА, 2015. - 128 с.
9. Егорова О.В. Использование ИКТ на уроках математики// Фестиваль Педагогических идей «Открытый урок» [Электронный ресурс]. URL:<http://festival.1september.ru/articles/596413/> (дата обращения: 25.03.2017).
10. Жохов В.И., Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г. Дидактические материалы по алгебре 8 класс. - М.: Просвещение, 2014. - 160 с.
11. Зеленский А.С., Панфилов И.И. Решение уравнений и неравенств с модулем: учебное пособие. - М.: Научно-технический центр «Университетский»: Универ - Пресс, 2013. - 112 с.

12. Ильина С.Д. Графические решения уравнений содержащих знак модуля. Научно - методический журнал Математика в школе № 8. - М.: Школа - Пресс, 2003.
13. Ильясова В.Р. Информационные образовательные технологии на уроках математики // Фестиваль Педагогических идей «Открытый урок» [Электронный ресурс]. URL:<http://festival.1september.ru/articles/581360/> (дата обращения: 15.03.2017).
14. Кунаш, М.И. Индивидуальный образовательный маршрут школьника. Методический конструктор. Модели. Анализ : книга для учителя/ М.И. Кунаш - Волгоград: Учитель, 2013. - 170 с.
15. Левитас Г.Г. Методика преподавания математики в основной школе: учебное пособие / Г.Г. Левитас. - Астрахань.: Издательский дом «Астраханский университет», 2014. - 179 с.
16. Лернер И.Я. Дидактические основы методов обучения. - М.: Педагогика, 1981. - 186 с.
17. Майер Р.А., Майер Р.Р. История математики: Курс лекций. Часть 2. - Красноярск: РИО ГОУ ВПО КГПУ им. В.П. Астафьева, 2012. - 144 с.
18. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И., Суворова С.Б. Алгебра: учебник для 8 класса. - М.: Просвещение, 2014. - 287 с.
19. Малыгин К. А. Элементы историзма в преподавании математики в средней школе: пособие для учителей. 2-е изд. - М.: Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР, 1963. - 224 с.
20. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б. и др. Алгебраический тренажер. - М.: Илекса, 2013. - 125 с.
21. Назаренко А.М., Назаренко Л.Д. Тысяча и один пример. Равенства и неравенства. Пособие для абитуриентов. - Сумы: Слобожанщина, 2004. - 272 с.
22. Немов Р.С. Психология: учебное пособие / Р.С. Немов - М.:ВЛАДОС, 2003. - 496 с.

23. Никольская И.Л. Факультативный курс по математике: учебное пособие для 7-9 кл. - М.: Просвещение, 1991. - 383 с.
24. Никольский С.М., Потапов М.К. Математика: учебник для 6 класса. 14 - е изд. - М.: Просвещение, 2015. - 256 с.
25. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В. Алгебра: учебник для 7 класса. - М.: Просвещение, 2014. - 287 с.
26. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В. Алгебра: учебник для 9 класса. - М.: Просвещение, 2015. - 335 с.
27. Письмо Министерства Образования и Науки РФ «О методических рекомендациях по вопросам организации профильного образования» от 4 марта 2010 № 03 - 413 // текст письма официально не был опубликован.
28. Письмо Министерства Образования и Науки РФ «О методических рекомендациях по реализации элективных курсов» от 4 марта 2010 № 03 - 412 // текст письма официально не был опубликован.
29. Приказ Министерства образования и науки РФ «О внесении изменений в федеральный перечень учебников, рекомендованных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования, утвержденный приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 31 марта 2014 г. № 253» от 26 января 2016 года № 38.
30. Садриева Э.Ф. Методика изучения уравнений и неравенств, содержащих переменную под знаком модуля, с использованием ИКТ [Электронный ресурс]. URL:<http://kpfu.ru/portal/docs/F1741496018/Sadrieva.pdf> (дата обращения: 16.02.2017).
31. Севрюков П.Ф., Смоляков А.Н. Уравнения и неравенства с модулями и методика их решения: учебно-методическое пособие. - М.: Народное образование, 2005. - 112 с.
32. Синкевич Г.И. История математики и математического образования [Электронный ресурс].

URL:http://www.unn.ru/math/no/13/_nom13_011_sinkevich (дата обращения: 20.01.2017).

33. Смоляков А.Н. Уравнения и неравенства, содержащие знак модуля. Научно - методический журнал Математика в школе № 9. - М.: Школа - Пресс, 2004.

34. Студенецкая В.Н., Сагателова Л.С. Математика 8-9 классы: сборник элективных курсов [Электронный ресурс]. URL:<http://www.proshkolu.ru/lib/id/5829/&from=newcmt> (дата обращения: 01.04.2017).

35. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования (5-9 кл.) [утверждён приказом Минобрнауки России от 17 декабря 2010 г. № 1897]: Министерство образования и науки России [Электронный ресурс]. URL:<http://минобрнауки.рф/документы/938> (дата обращения: 21.03.2017).

36. Фридман Л.М., Кулагина И.Ю. Психологический справочник учителя. - М.: Издательство «Совершенство», 1991. - 194 с.

37. Фридман Л.М. Психолого-педагогические основы обучения математики в школе. - М.: Просвещение, 1983. - 160 с.

38. Цулина, И. В. Элективные курсы в системе школьного математического образования/И. В. Цулина // Молодой ученый [Электронный ресурс]. URL:<http://www.moluch.ru/archive/11/697> (дата обращения: 02.03.2017).

39. Чаплыгин В.Ф. Сравнение и классификация в упражнениях с модулями. Научно - методический журнал Математика в школе № 9. - М.: Школа - Пресс, 2004.

40. Шмигирилова И.Б. Теория и методика обучения математике в понятиях, схемах и таблицах / И.Б. Шмигирилова. - Петропавловск: 2007. - 148 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Решение уравнений с модулем

Описание

✓ Выберите верные варианты:

Найдите значение x 1 балл.

$$|x| = 2$$

☒ $x=2$ ✓

☐ $x=4$

☒ $x=-2$ ✓

ДОБАВИТЬ ПОЯСНЕНИЕ

Рис. 18. Дополнительный тест по теме «Решение уравнений с модулем»

Изменить комментарий и число баллов:

Решить уравнение с модулем 1 балл.

$$|-x-2| = 2$$

ДОБАВИТЬ ПОЯСНЕНИЕ

ИЗМЕНИТЬ ВОПРОС

Рис. 19. Дополнительное задание по теме

Изменить комментарий и число баллов:

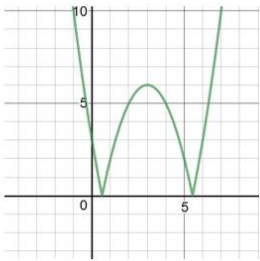
Решите уравнение, используя метод замены или метод интервалов: 1 балл.

$$7|2-3x| - 2|3x-1| = 4+3x$$

ДОБАВИТЬ ПОЯСНЕНИЕ

Рис. 20. Дополнительное задание по теме

Соотнесите представленный график функции 1 балл.



☐ Вариант 1
 $y = |x-1| + |x-2|$

☒ Вариант 2
 $y = |x^2 - 6x + 3|$

☐ Вариант 3
 $y = |2 - |x||$

Рис. 21. Тестовое задание

Выберите верные варианты:

Какие числа являются решениями уравнения 1 балл.

$$|x+3| = -4$$

☐ -7
☐ -7;1
☐ Нет корней
☐ 1

ДОБАВИТЬ ПОЯСНЕНИЕ

ИЗМЕНИТЬ ВОПРОС

Рис. 22. Дополнительное задание

Выберите верные варианты:

Определите координаты точки пересечения графиков функций $y=|2x+1|$ и $y=0$ 1 балл.

☐ (0,0)
☐ (-0,5,0)
☐ (0;-0,5)
☐ (0,5;0)

ДОБАВИТЬ ПОЯСНЕНИЕ

ИЗМЕНИТЬ ВОПРОС

Рис. 23. Тестовое задание по теме