

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Ульяновский государственный педагогический университет
имени И.Н. Ульянова»
(ФГБОУ ВПО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)**

**Факультет дополнительного образования и повышения квалификации
Кафедра методики преподавания математики**

ВЫПУСКНАЯ АТТЕСТАЦИОННАЯ РАБОТА

Тема

**Формирование умения решения квадратных
уравнений в 8 классе**

Автор работы: слушатель программы профессиональной переподготовки «Теория и методика обучения математике» -

Шестакова Инна Геннадьевна

Руководитель работы: К.П.Н. доцент Кузина Н.Г.

Ульяновск, 2014

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
Глава 1. Теоретические аспекты обучения решению квадратных уравнений в 8 классе	
1.1. Из истории возникновения квадратных уравнений.....	6
1.2. Основные направления изучения линий уравнений в школьном курсе алгебры.....	13
1.3. Методика изучения квадратных уравнений.....	20
Глава 2. Разработка и практическое использование различных форм уроков математики	
2.1. Реализация требований ФГОС ООО при изучении темы «Квадратные уравнения» в 8 классе	75
2.2 Разработка урока по теме "Решение квадратных уравнений по формуле".....	79
2.3 Разработка уроков по теме "Решение квадратных уравнений".....	83
Заключение.....	88
Литература.....	89

Введение

Сухие строки уравнений –

В них сила разума влилась.

В них объяснение явлений,

Вещей разгаданная связь.

Л.М.Фридман [10,268].

Уравнения в школьном курсе алгебры занимают ведущее место. На их изучение отводится времени больше, чем на любую другую тему школьного курса математики. Сила теории уравнений в том, что она не только имеет теоретическое значение для познания естественных законов, но и служит конкретным практическим целям. Большинство задач о пространственных формах и количественных отношениях реального мира сводится к решению различных видов уравнений. Овладевая способами их решения, люди находят ответы на различные вопросы из науки и техники (транспорт, сельское хозяйство, промышленность, связь и т. д.). Так же для формирования умения решать уравнения большое значение имеет самостоятельная работа учащегося при обучении решения уравнений. При изучении любой темы уравнения могут быть использованы как эффективное средство закрепления, углубления, повторения и расширения теоретических знаний, для развития творческой математической деятельности учащихся.[10,241].

Автором данной работы выбрана тема «Формирование умения решения квадратных уравнений в 8 классе», так как она актуальна в современном мире; это объясняется тем, что уравнения широко используются в различных разделах математики, в решении важных прикладных задач.

Для этой темы характерна большая глубина изложения и богатство устанавливаемых с ее помощью связей в обучении, логическая обоснованность изложения. Поэтому она занимает исключительное положение в линии уравнений. К изучению темы «Квадратные уравнения» учащиеся приступают, уже накопив определенный опыт, владея достаточно большим запасом алгебраических и общематематических представлений, понятий, умений. В значительной мере именно на материале данной темы осуществляется синтез материала, относящегося к уравнениям.

Исходя из вышесказанного, автор, выбирая тему выпускной работы, руководствовался ее значимостью и сложностью при обучении учащихся решению квадратных уравнений разного вида.

Цель работы: формирование представлений о работе над квадратными уравнениями на уроках математики. Исходя из данной цели, были поставлены следующие задачи:

- изучить научно-методическую литературу, касающуюся изучению уравнений;
- проанализировать школьные учебники и выделить в них место уравнений;
- разработать уроки по данной теме.

Для решения вышеуказанных задач были изучены следующие литературные источники:

- 1) Алгебра: Учеб. для 8 кл. общеобразоват. учреждений / С.М. Никольский, М.К. Потапов и др. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2006. – 287 с.
- 2) Алгебра: Учеб. для 8 кл. общеобразоват. учреждений / Ш.А.Алимов, Ю.М.Колягин, Ю.В.Сидоров и др. – 17-е изд. – М.: Просвещение, 2010. – 255с.

3) Алгебра: Учеб. для 8 кл. общеобразоват. учреждений в 2 ч. Ч1. / Мордкович А.Г.–12-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2010. – 215с.

4) Алгебра: Учеб. для 8 кл. общеобразоват. учреждений / Макарычев Ю.Н., Н.Г.Миндюк и др. –16-е изд. – М.: Просвещение, 2008. – 271с.

5) Бекаревич А.Б. Уравнения в школьном курсе математики. – М., 2000. – 241с.

6) Глейзер Г.И. История математики в школе VII – VIII классы. – М., 1982.

7) Колягин Ю.М. Методика преподавания математике в средней школе. Частные методики. – М.: Просвещение, 2002.

8) Маркушевич Л.А. Уравнения и неравенства в заключительном повторении курса алгебры средней школы // Математика в школе. – 2001. - №1. – с.15

9) Методика и технология обучения математике. Курс лекций: пособие для вузов / под ред. Н.Л.Стефановой, Н.С. Подходовой. – М.: Дрофа, 2005. – 416 с.

10) Мишин В.И. Методика преподавания математики в средней школе. – М.,1999.- 398с.

11) Оганесян В.А. Методика преподавания математики в средней школе. – М.: Просвещение, 2003. – 368 с.

Проанализировав некоторые источники, можно сделать вывод о недостаточном освещении изучаемого вопроса в современной методической литературе.

Объект исследования работы: процесс обучения математике.

Предмет: формирование умения решения квадратных уравнений у учащихся 8-го класса.

Контингент: учащиеся 8-го класса.

1. Теоретические аспекты обучению решения уравнений в 8 классе

1.1. Из истории возникновения квадратных уравнений

Алгебра возникла в связи с решением разнообразных задач при помощи уравнений. Обычно в задачах требуется найти одну или несколько неизвестных, зная при этом результаты некоторых действий, произведенных над искомыми и данными величинами. Такие задачи сводятся к решению одного или системы нескольких уравнений, к нахождению искомого с помощью алгебраических действий над данными величинами. В алгебре изучаются общие свойства действий над величинами.

Некоторые алгебраические приемы решения линейных и квадратных уравнений были известны еще 4000 лет назад в Древнем Вавилоне.

Квадратные уравнения в Древнем Вавилоне

Необходимость решать уравнения не только первой, но и второй степени еще в древности была вызвана потребностью решать задачи, связанные с нахождением площадей земельных участков и с земляными работами военного характера, а также с развитием астрономии и самой математики. Квадратные уравнения умели решать около 2000 лет до нашей эры вавилоняне. Применяя современную алгебраическую запись, можно сказать, что в их клинописных текстах встречаются, кроме неполных, и такие, например, полные квадратные уравнения.

Правило решения этих уравнений, изложенное в вавилонских текстах, совпадает по существу с современным, однако неизвестно, каким образом дошли вавилоняне до этого правила. Почти все найденные до сих пор клинописные тексты приводят только задачи с решениями, изложенными в виде рецептов, без указаний относительно того, каким образом они были найдены. Несмотря на высокий уровень развития алгебры в Вавилоне, в клинописных текстах отсутствуют понятие отрицательного числа и общие методы решения квадратных уравнений.

В «Арифметике» Диофанта нет систематического изложения алгебры, однако в ней содержится систематизированный ряд задач, сопровождаемых объяснениями и решаемых при помощи составления уравнений разных степеней.

При составлении уравнений Диофант для упрощения решения умело выбирает неизвестные.

Вот, к примеру, одна из его задач.

Задача 2. «Найти два числа, зная, что их сумма равна 20, а произведение — 96».

Диофант рассуждает следующим образом: из условия задачи вытекает, что искомые числа не равны, так как если бы они были равны, то их произведение равнялось бы не 96, а 100. Таким образом, одно из них будет больше половины их суммы, т. е. $10 + x$. Другое же меньше, т. е. $10 - x$. Разность между ними $2x$. Отсюда уравнение:

$$(10+x)(10-x)=96,$$

или же

$$100 - x^2 = 96.$$

$$x^2 - 4 = 0$$

Отсюда $x = 2$. Одно из искоемых чисел равно 12, другое 8. Решение

$x = -2$ для Диофанта не существует, так как греческая математика знала только положительные числа.

Если решить эту задачу, выбирая в качестве неизвестного одно из искоемых чисел, то можно прийти к решению уравнения:

$$y(20-y)=96$$

$$y^2 - 20y + 96 = 0$$

Ясно, что, выбирая в качестве неизвестного полуразность искоемых чисел, Диофант упрощает решение; ему удастся свести задачу к решению неполного квадратного уравнения.

Квадратные уравнения в Индии

Задачи на квадратные уравнения встречаются уже в астрономическом трактате «Ариабхаттиам», составленном в 499 г. индийским математиком и астрономом Ариабхаттой. Другой индийский ученый, Брахмагупта (VII в.), изложил общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единой канонической форме:

$$ax^2 + bx = c, a > 0. \quad (1)$$

В уравнении (1) коэффициенты, могут быть и отрицательными. Правило Брахмагупты по существу совпадает с нашим.

В Индии были распространены публичные соревнования в решении трудных задач. В одной из старинных индийских книг говорится по поводу таких соревнований следующее: «Как солнце блеском своим затмевает звезды, так ученый человек затмит славу в народных собраниях, предлагая и решая алгебраические задачи». Задачи часто облекались в стихотворную форму.

Вот одна из задач знаменитого индийского математика XII в. Бхаскары.

Задача 3.

«Обезьянок резвых стая,

Всласть поевши, развлекалась.

Их в квадрате часть восьмая

На поляне развлекалась.

А двенадцать по лианам

Стали прыгать, повисая.

Сколько ж было обезьянок,

Ты скажи мне, в этой стае?»

Решение Бхаскары свидетельствует о том, что автор знал о двузначности корней квадратных уравнений.

Соответствующее задаче 3 уравнение:

Бхаскара пишет под видом:

$$x^2 - 64x = -768$$

И, чтобы дополнить левую часть этого уравнения до квадрата, прибавляет к обеим частям 32^2 , получая затем:

$$x^2 - 64x + 32^2 = -768 + 1024,$$

$$(x - 32)^2 = 256,$$

$$x - 32 = \pm 16,$$

$$x_1 = 16, x_2 = 48.$$

Квадратные уравнения у Аль-Хорезми

В алгебраическом трактате Аль-Хорезми дается классификация линейных и квадратных уравнений. Автор насчитывает 6 видов уравнений, выражая их следующим образом:

- 1) «Квадраты равны корням», т. е. $ax^2 = bx$.
- 2) «Квадраты равны числу», т. е. $ax^2 = c$.
- 3) «Корни равны числу», т. е. $ax = c$.
- 4) «Квадраты и числа равны корням», т. е. $ax^2 + c = bx$.
- 5) «Квадраты и корни равны числу», т. е. $ax^2 + bx = c$.
- 6) «Корни и числа равны квадратам», т. е. $bx + c = ax^2$.

Для Аль-Хорезми, избегавшего употребления отрицательных чисел, члены каждого из этих уравнений слагаемые, а не вычитаемые. При этом заведомо не берутся во внимание уравнения, у которых нет положительных решений. Автор излагает способы решения указанных уравнений, пользуясь приемами ал-джабр и ал-мукабала. Его решение, конечно, не совпадает полностью с нашим. Уже не говоря о том, что оно чисто риторическое, следует отметить, например, что при решении неполного квадратного уравнения первого вида Аль-Хорезми, как и все математики до XVII в., не учитывает нулевого решения, вероятно, потому, что в конкретных практических задачах оно не имеет значения. При решении полных квадратных уравнений Аль-Хорезми на частных числовых примерах излагает правила решения, а затем их геометрические доказательства.

Приведем пример.

Задача 4. «Квадрат и число 21 равны 10 корням. Найти корень» (подразумевается корень уравнения $x^2 + 21 = 10x$).

Решение: раздели пополам число корней, получишь 5, умножь 5 само на себя, от произведения отними 21, останется 4. Извлеки корень из 4, получишь 2. Отними 2 от 5, получишь 3, это и будет искомый корень. Или же прибавь 2 к 5, что даст 7, это тоже есть корень.

Трактат Аль-Хорезми является первой, дошедшей до нас книгой, в которой систематически изложена классификация квадратных уравнений и даны формулы их решения.[3,75]

Квадратные уравнения в Европе XII-XVII в.

Формы решения квадратных уравнений по образцу Аль-Хорезми в Европе были впервые изложены в «Книге абака», написанной в 1202г. итальянским математиком Леонардом Фибоначчи. Автор разработал самостоятельно некоторые новые алгебраические примеры решения задач и первый в Европе подошел к введению отрицательных чисел.

Эта книга способствовала распространению алгебраических знаний не только в Италии, но и в Германии, Франции и других странах Европы. Многие задачи из этой книги переходили почти во все европейские учебники XIV-XVII вв. Общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единому каноническому виду $x^2 + bx = c$ при всевозможных комбинациях знаков и коэффициентов b , c , было сформулировано в Европе в 1544 г. М.Штифелем.

Вывод формулы решения квадратного уравнения в общем виде имеется у Виета, однако Виет признавал только положительные корни. Итальянские математики Тарталья, Кардано, Бомбелли среди первых в XVI в. учитывают, помимо положительных, и отрицательные корни. Лишь в XVII в. благодаря трудам Жирара, Декарта, Ньютона и других ученых способ решения квадратных уравнений принимает современный вид.[5,12].

Истоки алгебраических методов решения практических задач связаны с наукой древнего мира. Как известно из истории математики, значительная часть задач математического характера, решаемых египетскими, шумерскими, вавилонскими писцами-вычислителями (XX—VI вв. до н. э.), имела расчетный характер. Однако уже тогда время от времени возникали задачи, в которых искомое значение величины задавалось некоторыми косвенными условиями, требующими, с нашей современной точки зрения, составления уравнения или системы уравнений. Первоначально для решения таких задач применялись арифметические методы. В дальнейшем начали формироваться начатки алгебраических представлений. Например, вавилонские вычислители умели решать задачи, сводящиеся с точки зрения современной классификации к уравнениям второй степени. Был создан метод решения текстовых задач, послуживший в дальнейшем основой для выделения алгебраического компонента и его независимого изучения.

Это изучение осуществлялось уже в другую эпоху сначала арабскими математиками (VI—X вв. н. э.), выделившими характерные действия, посредством которых уравнения приводились к стандартному виду: приведение подобных членов, перенос членов из одной части уравнения в другую с переменной знака. А затем европейскими математиками Возрождения, в итоге длительного поиска создавшими язык современной алгебры, использование букв, введение символов арифметических операций, скобок и т. д. На рубеже XVI—XVII вв. алгебра как специфическая часть математики, обладающая своим предметом, методом, областями приложения, была уже сформирована. Дальнейшее ее развитие, вплоть до нашего времени, состояло в совершенствовании методов, расширении области приложений, уточнении понятий и связей их с понятиями других разделов математики.

Итак, ввиду важности и обширности материала, связанного с понятием уравнения, его изучение в современной методике математики связано с тремя главными областями своего возникновения и функционирования.

1.2. Основные направления изучения линий уравнений в школьном курсе алгебры

Уравнение как общематематическое понятие многоаспектно. Можно выделить главные области возникновения и функционирования понятия «уравнение» как:

- средства решения текстовых задач;
- особого рода формулы, служащей в алгебре объектом изучения;
- формулы, которой косвенно определяются числа или координаты точек плоскости (пространства), служащие его решением.[12,268]

Каждое из этих представлений оказалось в том или ином отношении полезным.

Названным областям относятся три основных направления изучения линий уравнений в школьном курсе алгебры.

1. Прикладная направленность линии уравнений раскрывается главным образом при изучении алгебраического метода решения текстовых задач. Этот метод широко применяется в школьной математике, поскольку он связан с обучением приемам, используемым в приложениях математики.

В настоящее время, ведущее положение в приложениях математики занимает математическое моделирование (Математическое моделирование заключается в конструировании по определенным правилам некоторой формальной системы, которая отображает через совокупность математических операций над величинами определенную гипотезу о структуре или воспитании). Используя это понятие, можно сказать, что прикладное значение уравнений, их систем определяется тем, что они являются основной частью мате-

математических средств, используемых в математическом моделировании. [14,246].

2. Теоретико-математическая направленность линии уравнений раскрывается в двух аспектах:

- выделение и изучение наиболее важных классов уравнений, и их систем;
- изучение обобщенных понятий, относящихся ко всей линии в целом.

Оба эти аспекта необходимы в курсе школьной математики. Основные классы уравнений связаны с простейшими и одновременно наиболее важными математическими моделями. Использование обобщенных понятий и методов позволяет логически упорядочить изучение линии в целом, поскольку они описывают то общее, что имеется в процедурах и приемах решения, относящихся к отдельным классам уравнений, неравенств, систем. В свою очередь, эти общие понятия и методы опираются на основные логические понятия: неизвестное, равенство, равносильность, логическое следование, которые также должны быть раскрыты в линии уравнений.

3. Направленность на установление связей с остальным содержанием курса математики. Эта линия тесно связана с числовой линией, причем эта связь - двусторонняя. Основная идея, реализуемая в процессе установления взаимосвязи этих линий,— это идея последовательного расширения числовой системы. Все числовые области, рассматриваемые в школьной алгебре и началах анализа, за исключением области всех действительных чисел, возникают в связи с решением каких-либо уравнений.

Например, введение арифметического квадратного корня из рациональных чисел позволяет записывать корни не только уравнений вида $x^2 = b$, где b —неотрицательное рациональное число, но и любых квадратных уравнений с

рациональными коэффициентами и неотрицательным дискриминантом. [9,341]

Линия уравнений тесно связана также и с функциональной линией. Одна из важнейших таких связей — приложения методов, разрабатываемых в линии уравнений, к исследованию функции (например, к заданиям на нахождение области определения некоторых функций, их корней, промежутков знакопостоянства и т. д.). С другой стороны, функциональная линия оказывает существенное влияние как на содержание линии уравнений, так и на стиль ее изучения. В частности, функциональные представления служат основой привлечения графической наглядности к решению и исследованию уравнений и их систем. [12,269]

Характеризуя уравнение, нужно учитывать разные стороны этого понятия. Уравнение представляет собой некоторую запись, составленную по определенным правилам (синтаксический подход). Заменяя в записи буквы (переменные) конкретными числами, переходят к верным или неверным равенствам (логический подход). Стоящие в левой и правой частях уравнения, выражения задают функции, значения которых связаны знаком "=" (функциональный подход). Действия над уравнениями производятся по некоторым правилам (операционный подход). Задание "решить уравнение" предполагает отыскание всех его корней (целевой подход).

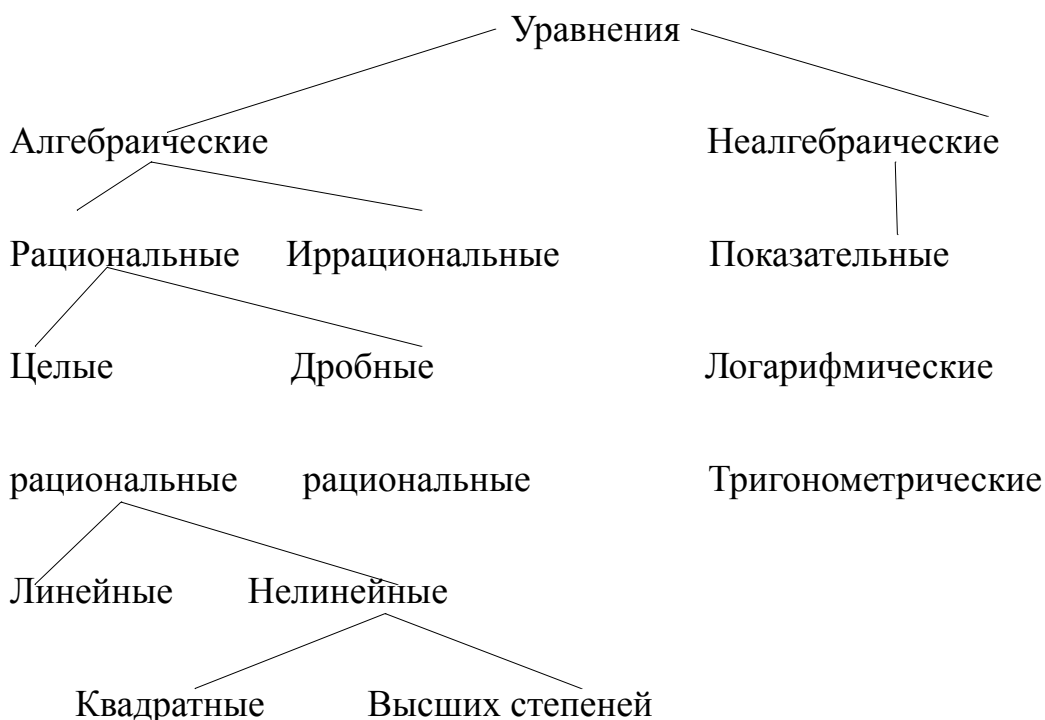
На практике понятие уравнения может быть введено посредством выделения его в результате решения задач алгебраическим методом. В этом случае существенным является подход к понятию уравнения, при котором уравнение представляет косвенную форму задания некоторого неизвестного числа, имеющего в соответствии с сюжетом конкретную математическую интерпретацию (модельный подход). Указанный способ введения понятия уравнения соответствует прикладному аспекту понятия уравнения, отраженному в следующем определении: "Равенство, содержащее неизвестное число, обозначенное

буквой, называется уравнением. Корнем уравнения называется то значение неизвестного, при котором уравнение обращается в верное равенство".

Существует другой вариант определения уравнения: "Равенство с переменной называется уравнением. Значение переменной, при котором равенство переменной обращается в верное числовое равенство, называется корнем уравнения". Это определение характеризует уравнение как предикат особого вида, а корень уравнения - число из множества истинности этого предиката. Термин "уравнение" несет в себе признаки знакового компонента, а термин "корень уравнения" учитывает смысловой компонент.

Можно встретить и третий вариант определения, роль которого проявляется при изучении графического метода решения уравнений: "Уравнение - это равенство двух функций".

Классификация уравнений тесно связана с конкретными функциями, изучаемыми в школьном курсе математики. В соответствии с этим в школьном курсе алгебры выделяются определенные виды уравнений:



В отношении формирования понятия равносильности и его применения учебные пособия можно разделить на две группы. К первой относятся те пособия, в которых использовании равносильных преобразований явно основано на введении и изучении понятия равносильности; ко второй - те, в которых применение равносильных преобразований предшествует определению понятия равносильности [7,102].

Методика работы над понятием при указанных подходах существенно отличается.

В школьном курсе математики можно выделить три этапа, связанных с рассмотрением этого вопроса.

Во-первых, в начальном курсе математики и в начале изучения алгебры решаются простейшие модели. Используемые преобразования получают индуктивное обоснование. По мере накопления опыта индуктивные рассуждения чаще заменяются такими, где равносильность используется, но сам термин не вводится.

Во-вторых, выделяется понятие равносильности и сопоставляется его теоретическое содержание с правилами преобразований, которые выводятся на его основе.

В-третьих, на основе понятия равносильности происходит развертывание и общей теории, и теории отдельных классов уравнений. Это характерно для старших классов при изучении курса "Алгебры и начала анализа", а также имеет место и в начальной школе в классах углубленного изучения математики [12,172].

В процессе решения уравнений также используется понятие логического следования, которое изучается позже понятия равносильности и является дополнением к нему. Методика работы с понятием логического следования имеет много общих черт с методикой изучения равносильности и равносильных

преобразований. Нередко в практике работы учителей логическое следование применяется как прием, упрощающий процесс решения, если сохранение равносильности может быть достигнуто сравнительно "дорогой ценой" [17, 111].

Среди неравносильных преобразований есть преобразования, не являющиеся логическим следованием. Например, переход к рассмотрению частного случая (пример: переход от уравнения $a \cdot b = 0$ и рассматривать как практические приемы, позволяющие сосредоточить внимание на отдельных шагах процесса решения уравнения).

Можно выделить три основных типа таких преобразование:

- 1) Преобразование одной из частей уравнения.
- 2) Согласованное преобразование обеих частей уравнения.
- 3) Преобразование логической структуры.

Преобразования первого типа используются при необходимости упрощения выражения в какой-то из частей уравнения. Например, решая уравнение $\cos x \cdot \operatorname{tg} x = 1$ можно попытаться заменить выражение в левой части более простым. В данном случае соответствующее преобразование приводит к уравнению $\sin x = 1$, неравносильному исходному за счет изменения области определения. Возможность получения при такой замене уравнения, неравносильного данному, приходится учитывать при изучении некоторых типов уравнений, например тригонометрических или логарифмических.

В классе дробно-рациональных уравнений с этим явлением приходится сталкиваться гораздо реже. Здесь это связано с возможностью потери корней при сокращении дробей. Наконец, в классе целых алгебраических уравнений рассматриваемый тип преобразований всегда приводит к уравнениям, равносильным данным.

Преобразования второго типа состоят в согласованном изменении обеих частей уравнения в результате применения к ним арифметических действий или элементарных функций. Преобразования второго типа сравнительно многочисленны. Они составляют ядро материала, изучаемого в линии уравнений.

Приведем примеры преобразований этого типа.

- 1) Прибавление к обеим частям уравнения одного и того же выражения.
- 2) Умножение (деление) обеих частей уравнения на одно и того же выражения.
- 3) Переход от уравнения $a = b$ к уравнению $f(a) = f(b)$, где f - некоторая функция, или обратный переход.

К третьему типу преобразований относятся:

- преобразования, осуществляемые на основе свойств арифметических операций. К ним можно отнести переход от уравнения к совокупности уравнений после предварительного разложения на множители; переход от уравнения к системе после приравнивания суммы квадратов выражений к нулю; почленное сложение, умножение, деление уравнений, неравенств и т.д.
- преобразования, осуществляемые при помощи логических операций. Примерами их являются выделение из системы одного из компонентов, замена переменных.

Таким образом, владение содержанием линии уравнений позволяет расширить список выполнимых преобразований.

Изучение и использование преобразований уравнений и их систем, с одной стороны, предполагают достаточно высокую логическую культуру учащихся, а с другой стороны, в процессе изучения и применения таких преоб-

разований имеются широкие возможности для формирования логической культуры.

Таким образом, владение содержанием линии уравнений позволяет расширить список выполнимых преобразований. Так, умение решать квадратные уравнения позволяет осуществлять сокращение дробей, в числителе или знаменателе которых имеется квадратный трехчлен. В итоге изучения материала линии уравнений учащиеся должны не только овладеть применением алгоритмических предписаний к решению конкретных заданий, но и научиться использовать логические средства для обоснования решений в случаях, когда это необходимо.

С началом систематического курса алгебры основное внимание уделяется вниманию способам решения линейных и квадратных уравнений, которые становятся специальным объектом изучения.

Далее рассмотрим различные виды квадратных уравнений и методику их изучения

1.3. Методика изучения квадратных уравнений

С началом изучения систематического курса алгебры основное внимание уделяется способам решения квадратных уравнений, которые становятся специальным объектом изучения. Для этой темы характерна большая глубина изложения и богатство устанавливаемых с ее помощью связей в обучении, логическая обоснованность изложения. Поэтому она занимает исключительное положение в линии уравнений и неравенств. К изучению этой темы учащиеся приступают, уже накопив определенный опыт, владея достаточно большим запасом алгебраических и общематематических представлений, понятий, умений.

Умение решать квадратные уравнения служит базой для решения других уравнений и их систем (дробных рациональных, иррациональных, высших степеней).

Для того чтобы решить любое квадратное уравнение, учащиеся должны знать:

- формулу нахождения дискриминанта;
- формулу нахождения корней квадратного уравнения;
- алгоритмы решения уравнений данного вида.

уметь:

- решать неполные квадратные уравнения;
- решать полные квадратные уравнения;
- решать приведенные квадратные уравнения;
- находить ошибки в решенных уравнениях и исправлять их;
- делать проверку.

Решение каждого уравнения складывается из двух основных частей:

- преобразования данного уравнения к простейшим;
- решения уравнений по известным правилам, формулам или алгоритмам.

При изучении темы «Квадратные уравнения» рассматриваются неполные, полные и приведенные квадратные уравнения. Для изучения данной темы были проанализированы современные школьные учебники разных авторов, таких как А.Г.Мордкович, С.М.Никольский, Ю.Н.Макарычев, М.И.Башмаков.

Анализ учебников

	А.Г. Мордкович	С.М. Никольский	Ю.Н. Макарычев	М.И. Башмаков
Историческая справка	-	-	-	+
Неполные квадратные уравнения	+	+	+	+
Полные квадратные уравнения	+	+	+	+
Приведённые квадратные уравнения	+	+	+	+
Теорема Виета	-	+	+	-
Теорема, обратная теореме Виета	-	+	+	-

Исходя из таблицы можно сделать вывод о том, что в учебниках алгебры разных авторов есть сходства и различия. Во всех современных школьных учебниках алгебры методическая линия изучения квадратных уравнений одинакова. В учебнике под ред. М.И.Башмакова дается историческая справка, а в других учебниках этого нет. В учебниках алгебры С.М.Никольского и Ю.Н.Макарычева при изучении темы «Квадратные уравнения» рассматриваются прямая и обратная теорема Виета.

Обучение решению уравнений начинается с простейших их видов, и программа [4,131] обуславливает постепенное накопление как их видов, так и «фонда» тождественных и равносильных преобразований, с помощью которых можно привести произвольное уравнение к простейшим. В этом направлении следует строить и процесс формирования обобщенных приемов решения уравнений в школьном курсе алгебры. В курсе математики старших классов учащиеся сталкиваются с новыми классами уравнений, систем или с углубленным изучением уже известных классов. Однако это мало влияет на уже сформированную систему знаний, умений и навыков; они дополняют ее новым фактическим содержанием.

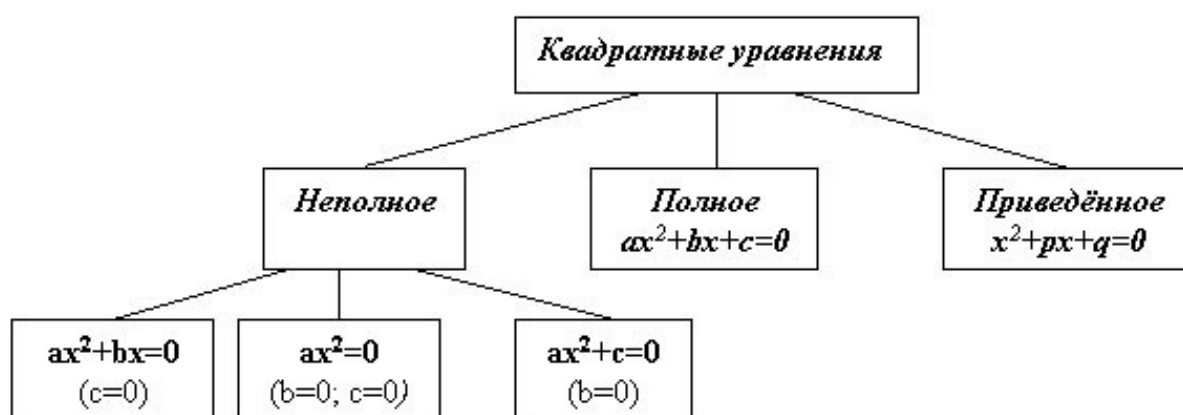
Обобщение способов деятельности учащихся при решении квадратных уравнений происходит постепенно. Можно выделить следующие этапы при изучении темы «Квадратные уравнения»:

I этап – «Решение неполных квадратных уравнений».

II этап – «Решение полных квадратных уравнений».

III этап – «Решение приведенных квадратных уравнений».

Классификация видов квадратных уравнений



На первом этапе рассматриваются неполные квадратные уравнения. Так как сначала математики научились решать неполные квадратные уравнения, поскольку для этого не пришлось, как говорится, ничего изобретать. Это уравнения вида: $ax^2 = 0$, $ax^2 + c = 0$, где $c \neq 0$, $ax^2 + bx = 0$, где $b \neq 0$.

Рассмотрим решение несколько таких уравнений:



1. Если $ax^2 = 0$.

Уравнения такого вида решаются по алгоритму:

1) найти x^2 ;

2) найти x .

Например, $5x^2 = 0$.

Разделив обе части уравнения на 5 получается: $x^2 = 0$, откуда $x = 0$.

2. Если $ax^2 + c = 0$, $c \neq 0$.

Уравнения данного вида решаются по алгоритму:

1) перенести слагаемые в правую часть;

2) найти все числа, квадраты которых равны числу c .

Например, $x^2 - 5 = 0$. Это уравнение равносильно уравнению $x^2 = 5$. Следовательно, надо найти все числа, квадраты которых равны числу 5. Таких чисел только два $\sqrt{5}$ и $-\sqrt{5}$. Таким образом, уравнение $x^2 - 5 = 0$ имеет два корня: $x_1 = \sqrt{5}$, $x_2 = -\sqrt{5}$ и других корней не имеет.

3. Если $ax^2 + bx = 0$, $b \neq 0$.

Уравнения такого вида решаются по алгоритму:

1) перенести общий множитель за скобки;

2) найти x_1, x_2 .

Например, $x^2 - 3x = 0$. Перепишем уравнение $x^2 - 3x = 0$ в виде

$x(x - 3) = 0$. Это уравнение имеет, очевидно, корни $x_1 = 0, x_2 = 3$. Других корней оно не имеет, ибо если в него подставить вместо x любое число, отличное от нуля и 3, то в левой части уравнения

$x(x - 3) = 0$ получится число, не равное нулю.

Итак, данные примеры показывают, как решаются неполные квадратные уравнения:

1) если уравнение имеет вид $ax^2 = 0$, то оно имеет один корень $x = 0$;

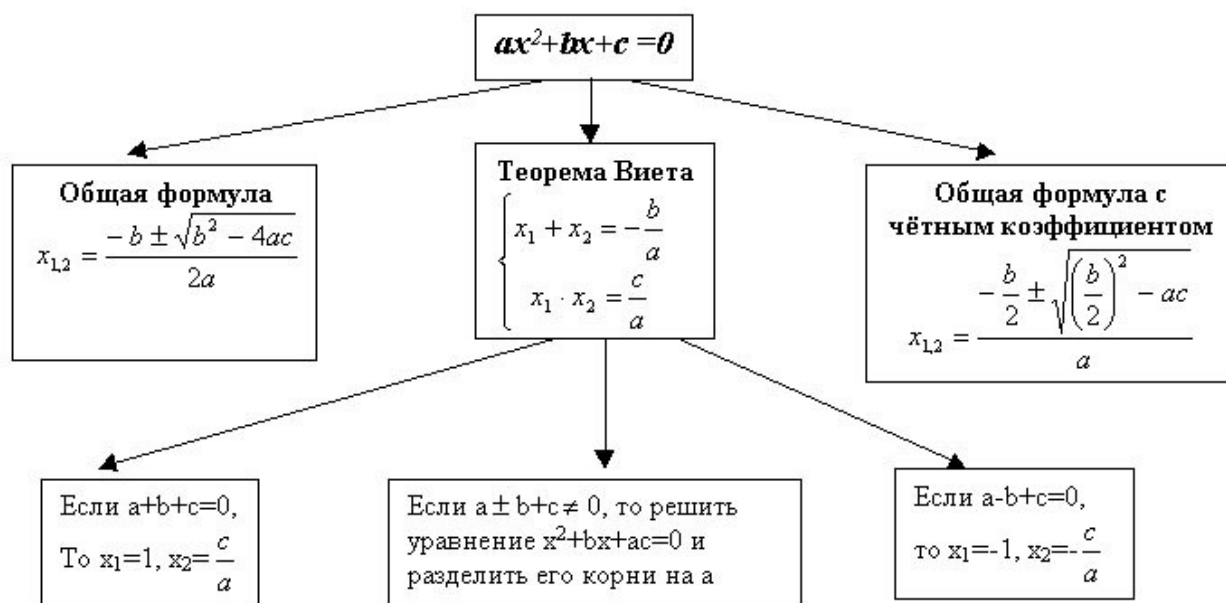
2) если уравнение имеет вид $ax^2 + bx = 0$, то используется метод разложения на множители: $x(ax + b) = 0$; значит, либо $x = 0$, либо $ax + b = 0$. В итоге получается два корня: $x_1 = 0; x_2 = -b/a$;

3) если уравнение имеет вид $ax^2 + c = 0$, то его преобразуют к виду $ax^2 = -c$ и далее $x^2 = -c/a$. В случае, когда $-c/a < 0$, уравнение $x^2 = -c/a$ не имеет корней (значит, не имеет корней и исходное уравнение $ax^2 + c = 0$). В случае, когда $-c/a > 0$, т.е. $-c/a = m$, где $m > 0$, уравнение $x^2 = m$ имеет два корня $x_1 = \sqrt{m}; x_2 = -\sqrt{m}$ (в этом случае допускается более короткая запись $x_{1,2} = \pm \sqrt{m}$).

Таким образом, неполное квадратное уравнение может иметь два корня, один корень, ни одного корня.

На втором этапе осуществляется переход к решению полного квадратного уравнения. Это уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c – заданные числа, $a \neq 0$, x – неизвестное.

Методы решения полных квадратных уравнений



Любое полное квадратное уравнение можно преобразовать к виду $ax^2 + bx + c = 0$, для того, чтобы определять число корней квадратного уравнения и находить эти корни. Рассматриваются следующие случаи решения полных квадратных уравнений: $D < 0$, $D = 0$, $D > 0$.

1. Если $D < 0$, то квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет действительных корней.

Например, $2x^2 + 4x + 7 = 0$. Решение: здесь $a = 2$, $b = 4$, $c = 7$.

$$D = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = 16 - 56 = -40.$$

Так как $D < 0$, то данное квадратное уравнение не имеет корней.

2. Если $D = 0$, то квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет один корень, который находится по формуле $x = -b/2a$.

Например, $4x - 20x + 25 = 0$. Решение: $a = 4$, $b = -20$, $c = 25$.

$$D = b^2 - 4ac = (-20)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 25 = 400 - 400 = 0.$$

Так как $D = 0$, то данное уравнение имеет один корень. Этот корень находится по формуле $x = -b/2a$. Значит, $x = 20/4$, $x = 5$.

3. Если $D > 0$, то квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня, которые находятся по формулам: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$. (1)

Например, $3x^2 + 8x - 11 = 0$. Решение: $a = 3$, $b = 8$, $c = -11$. $D = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-11) = 64 + 132 = 196 = 14^2$.

Так как $D > 0$, то данное квадратное уравнение имеет два корня. Эти корни находятся по формуле:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} . \text{ Значит } x_1 = (-8 - 14)/6 = \frac{-22}{6} = -3 \frac{2}{3} , x_2 = (-8 + 14)/6 = 1.$$

Составляется алгоритм решения уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$.

1. Вычислить дискриминант D по формуле $D = b^2 - 4ac$.
2. Если $D < 0$, то квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней.
3. Если $D = 0$, то квадратное уравнение имеет один корень, который находится по формуле
4. Если $D > 0$, то квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} ; x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} .$$

Это алгоритм универсален, он применим как к неполным, так и к полным квадратным уравнениям. Однако неполные квадратные уравнения обычно по этому алгоритму не решают.

Математики – люди практичные, экономные, поэтому пользуются формулой: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. (2)

Итак, можно сделать вывод, что квадратные уравнения можно решать подробно, используя сформулированное выше правило; можно – записать сразу формулу (2) и с ее помощью делать необходимые выводы. [1,98].

На третьем этапе рассматриваются приведенные квадратные уравнения, которые имеют вид $x^2 + px + q = 0$ (3), где p и q – данные числа. Число p – коэффициент при x , а q – свободный член. Дискриминант уравнения равен: $D = p^2 - 4q$.

Рассматривают 3 случая:

1. $D > 0$, тогда уравнение (3) имеет два корня, вычисляемые по формуле

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad (4)$$

2. $D = 0$, тогда уравнение (3) имеет единственный корень, или, как говорят, два совпадающих корня: $x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$.

3. $D < 0$, то уравнение не имеет корней.

Обычно в случае приведенного квадратного уравнения (3) вместо D рассматривается выражение $\frac{D}{4} = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$, имеющее тот же знак, что и D . При этом формулу корней приведенного квадратного уравнения (4) записывают так:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p}{2}}.$$

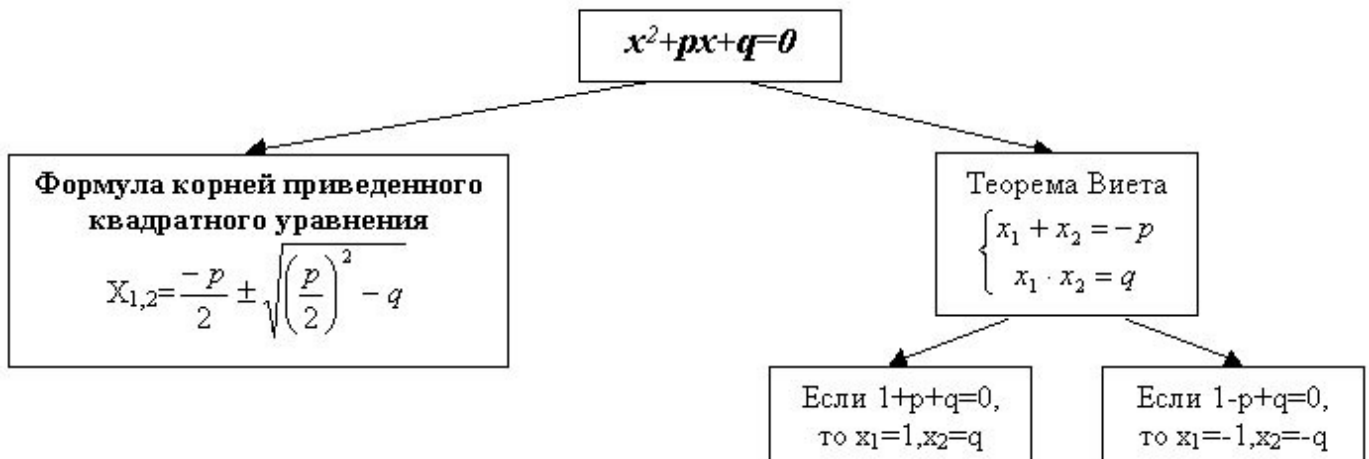
Отсюда следует, что:

Отсюда следует, что:

1) если то $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$ уравнение (3) имеет два корня;

- 2) если $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$, то уравнение имеет два совпадающих корня;
- 3) если $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$, то уравнение не имеет корней.

Методы решения приведенных квадратных уравнений.



Важным моментом в изучении квадратных уравнений является рассмотрение теоремы Виета, которая утверждает наличие зависимости между корнями и коэффициентами приведенного квадратного уравнения.

Теорема Виета. Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

Иначе говоря, если x_1 и x_2 - корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, то

$$x_1 + x_2 = -p,$$

$$x_1 x_2 = q. \quad (5)$$

Данные формулы называют формулами Виета в честь французского математика Ф.Виета (1540-1603), который ввел систему алгебраических символов.

лов, разработал основы элементарной алгебры. Он был одним из первых, кто числа стал обозначать буквами, что существенно развило теорию уравнений.

Например, приведенное уравнение $x^2 - 7x + 10 = 0$ имеет корни 2 и 5. Сумма корней равна 7, а произведение равно 10. Видно, что сумма корней равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

Справедлива также теорема, обратная теореме Виета.

Теорема, обратная теореме Виета. Если для чисел x_1, x_2, p, q справедливы формулы (5), то x_1 и x_2 - корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ [2,49].

Теорема Виета и теорема, обратная ей, часто применяются при решении различных задач.

Например. Напишем приведенное квадратное уравнение, корнями которого являются числа 1 и -3.

По формулам Виета

$$-p = x_1 + x_2 = -2,$$

$$q = x_1 \cdot x_2 = -3.$$

Следовательно, искомое уравнение имеет вид $x^2 + 2x - 3 = 0$.

Сложность освоения теоремы Виета связана с несколькими обстоятельствами. Прежде всего, требуется учитывать различие прямой и обратной теоремы. В прямой теореме Виета даны квадратное уравнение и его корни; в обратной — только два числа, а квадратное уравнение появляется в заключении теоремы. Учащиеся часто совершают ошибку, обосновывая свои рассуждения неверной ссылкой на прямую или обратную теорему Виета.

Например, при нахождении корней квадратного уравнения подбором ссылаться нужно на обратную теорему Виета, а не на прямую, как часто дела-

ют учащиеся. Для того чтобы распространить теоремы Виета на случай нулевого дискриминанта, приходится условиться, что в этом случае квадратное уравнение имеет два равных корня. Удобство такого соглашения проявляется при разложении квадратного трехчлена на множители

Таким образом, неполные и приведенные квадратные уравнения имеют разные алгоритмы решения, при изучении данной темы необходимо показать, что общая формула корней применима и для этих случаев. Обычно они изучаются перед выводом корней общего квадратного уравнения.

Тема «Квадратные уравнения» очень важна для изучения курса математики средней школы, т. к. является ступенькой в изучении более сложного материала математики средней школы. Умение быстро, рационально и правильно решать квадратные уравнения облегчает прохождение многих тем курса математики. Например, при изучении следующих тем:

8-й класс – решение задач на составление квадратных уравнений;

9-й класс – разложение квадратного трехчлена на множители; квадратичная функция и ее график; неравенства второй степени с одной переменной;

10-й класс – тригонометрические уравнения и неравенства; применение производной к исследованию функции;

11-й класс – интеграл; площадь криволинейной трапеции; иррациональные уравнения; показательные уравнения и неравенства; логарифмические уравнения и неравенства.

В школьном курсе математики изучаются формулы корней квадратных уравнений, с помощью которых можно решать любые уравнения. Однако имеются и другие способы решения квадратных уравнений, которые позволяют очень быстро и рационально решать многие уравнения. На факультативных занятиях с учащимися можно рассмотреть уравнения более сложного уровня, рассмотрев другие способы решения квадратных уравнений:

1. Разложение левой части уравнения на множители.
2. Метод выделения полного квадрата.
3. Решение уравнений способом «переброски».
4. Свойства коэффициентов квадратного уравнения.
5. Графическое решение квадратного уравнения.
6. Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки.
7. Решение квадратных уравнений с помощью номограммы.
8. Геометрический способ решения квадратных уравнений.

I. Разложение левой части уравнения на множители.

Примеры:

1. $x^2 + 10x - 24 = 0;$

Решение: Разложим левую часть уравнения на множители:

$$x^2 + 10x - 24 = x^2 + 12x - 2x - 24 = x(x + 12) - 2(x + 12) = (x + 12)(x - 2).$$

Следовательно, уравнение можно переписать так:

$$(x + 12)(x - 2) = 0.$$

Произведение равно нулю, когда один из множителей равен нулю.

т.е. $x + 12 = 0,$ или $x - 2 = 0,$

$$x = -12.$$

$$x = 2.$$

Ответ: -12; 2.

2. $x^2 + 3x + 2 = 0$.

Решение:

$$(x^2 + 2x) + (x + 2) = 0;$$

$$x(x + 2) + (x + 2) = 0;$$

$$(x + 1)(x + 2) = 0;$$

$$x + 1 = 0 \text{ или } x + 2 = 0;$$

$$x = -1, \quad x = -2.$$

Ответ: -2; -1.

3. $6x^2 + x - 2 = 0$.

Решение:

$$6\left(x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{2}{6}\right) = 0;$$

$$6\left(x^2 + \frac{4}{6}x - \frac{3}{6}x - \frac{2}{6}\right) = 0;$$

$$6\left(\left(x^2 - \frac{3}{6}x\right) + \left(\frac{4}{6}x - \frac{2}{6}\right)\right) = 0;$$

$$6\left(x\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{4}{6}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) = 0;$$

$$6\left(x\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) = 0;$$

$$6\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0;$$

$$x + \frac{2}{3} = 0 \quad \text{или} \quad x - \frac{1}{2} = 0;$$

$$x = -\frac{2}{3}; \quad x = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ответ: } -\frac{2}{3}; \frac{1}{2}.$$

II. Метод выделения полного квадрата.

Примеры:

$$1. \quad x^2 + 6x - 7 = 0.$$

Решение: Выделим в левой части полный квадрат. Для этого запишем выражение $x^2 + 6x$ в следующем виде: $x^2 + 6x = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3$.

В полученном выражении первое слагаемое – квадрат числа x , а второе – удвоенное произведение x на 3. Поэтому чтобы получить полный квадрат, нужно прибавить 3^2 , т.к. $x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = (x+3)^2$.

Преобразуем левую часть уравнения $x^2 + 6x - 7 = 0$ прибавляя к ней и вычитая 3^2 . Имеем:

$$x^2 + 6x - 7 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 - 7 = (x+3)^2 - 9 - 7 = (x+3)^2 - 16.$$

Таким образом, данное уравнение можно записать так:

$$(x+3)^2 - 16 = 0, \quad \text{т.е.} \quad (x+3)^2 = 16.$$

Следовательно, $x+3 = -4$, или $x+3 = 4$,

$$x = -7, \quad x = 1.$$

$$\text{Ответ: } -7; 1.$$

2. $5x^2 - 3x - 2 = 0$.

Решение:

Разделим обе части уравнения на 5, получим $x^2 - \frac{3}{5}x - \frac{2}{5} = 0$.

Применим метод выделения полного квадрата

$$x^2 - \frac{3}{5}x - \frac{2}{5} = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{3}{10} + \left(\frac{3}{10}\right)^2 - \left(\frac{3}{10}\right)^2 - \frac{2}{5} = \left(x - \frac{3}{10}\right)^2 - \frac{9}{100} - \frac{2}{5} = \left(x - \frac{3}{10}\right)^2 - \frac{49}{100}.$$

Следовательно, уравнение можно записать так $\left(x - \frac{3}{10}\right)^2 = \frac{49}{100}$.

отсюда $x - \frac{3}{10} = -\frac{7}{10};$ или $x - \frac{3}{10} = \frac{7}{10},$

$$x = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5}; \quad x = 1.$$

Ответ: $-\frac{2}{5}; 1.$

III. Решение уравнений способом «переброски».

Рассмотрим квадратное уравнение $ax^2 + vx + c = 0$, где $a \neq 0$.

Умножая обе его части на a , получаем уравнение $a^2x^2 + avx + ac = 0$.

Пусть $ax = y$, откуда $x = \frac{y}{a}$; тогда приходим к уравнению

$y^2 + vy + ac = 0$, равносильного данному. Его корни y_1 и y_2 найдем с помощью теоремы Виета.

Окончательно получаем $x_1 = \frac{y_1}{a}$ и $x_2 = \frac{y_2}{a}$. При этом способе коэффициент a умножается на свободный член, как бы «перебрасывается» к нему, поэтому его и называют *способом «переброски»*. Этот способ применяют, когда можно легко найти корни уравнения, используя теорему Виета и, что самое важное, когда дискриминант есть точный квадрат.

Примеры:

1. $2x^2 - 11x + 15 = 0$.

Решение: «Перебросим» коэффициент 2 к свободному члену, в результате получим уравнение $y^2 - 11y + 30 = 0$. Согласно теореме Виета

$$\begin{cases} y_1 = 5, \\ y_2 = 6; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{5}{2} \\ x_2 = \frac{6}{2}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2,5; \\ x_2 = 3. \end{cases}$$

Ответ: 2,5; 3.

2. $3\sqrt{2}x^2 - (3 + \sqrt{2})x + 1 = 0$.

Решение: Используя метод «переброски», получим уравнение

$$y^2 - (3 + \sqrt{2})y + 3\sqrt{2} = 0.$$

По теореме Виета $\begin{cases} y_1 = 3, \\ y_2 = 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3}{3\sqrt{2}}, \\ x_2 = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}; \\ x_2 = \frac{1}{3}. \end{cases}$

Ответ: $\frac{1}{3}; \frac{\sqrt{2}}{2}$.

IV. Свойства коэффициентов квадратного уравнения.

А. Пусть дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.

1. Если $a + b + c = 0$ (т.е. сумма коэффициентов уравнения равна нулю), то

$$x_1 = 1; x_2 = \frac{c}{a}.$$

Доказательство: Разделим обе части уравнения на $a \neq 0$, получим

приведенное квадратное уравнение $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

Согласно теореме Виета
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

По условию $a + b + c = 0$, откуда $b = -a - c$. Значит,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{-a-c}{a} = 1 + \frac{c}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = 1 \cdot \frac{c}{a}. \end{cases}$$

Получаем $x_1 = 1; x_2 = \frac{c}{a}$, что и требовалось доказать.

2. Если $a - b + c = 0$, или $b = a + c$, то $x_1 = -1, x_2 = -\frac{c}{a}$.

Доказательство: По теореме Виета
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

По условию $a - b + c = 0$, откуда $b = a + c$. Таким образом,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{a+v}{a} = -1 - \frac{c}{a}, \\ x_1 x_2 = -1 \cdot \left(-\frac{c}{a}\right), \end{cases}$$

т.е. $x_1 = -1; x_2 = -\frac{c}{a}$, что и требовалось доказать.

3. Если в уравнении $ax^2 + vx + c = 0$, $a = c = mn$, $v = m^2 + n^2$, то

$$x_1 = -\frac{m}{n}, x_2 = -\frac{n}{m}.$$

Доказательство: Действительно, приведем это уравнение в виде приведенного

$$x^2 + \frac{m^2 + n^2}{mn}x + \frac{mn}{mn} = 0.$$

Запишем уравнение в виде $x^2 + \left(\frac{m}{n} + \frac{n}{m}\right)x + \frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} = 0$.

Уравнение, записанное в таком виде, позволяет сразу получить корни

$$x_1 = -\frac{m}{n}, x_2 = -\frac{n}{m}.$$

4. Если $a = -c = m \cdot n$, $v = m^2 - n^2$, то корни имеют разные знаки, а именно:

$$x_1 = -\frac{m}{n}, x_2 = \frac{n}{m}.$$

Знаки перед дробями определяются знаком второго коэффициента.

Примеры:

1. $2x^2 - 7x + 5 = 0$.

Решение: так как $a + b + c = 0$ ($2 - 7 + 5 = 0$), то

$$x_1 = 1; x_2 = \frac{5}{2}.$$

Ответ: 1; 2,5.

$$2. \quad 7x^2 - 5x - 2 = 0.$$

Решение: так как $7 - 5 - 2 = 0$, то

$$x_1 = 1, x_2 = -\frac{2}{7}.$$

Ответ: $1; -\frac{2}{7}.$

$$3. \quad 5x^2 + 7x + 2 = 0.$$

Решение: так как $a - b + c = 0$ ($5 - 7 + 2 = 0$), то

$$x_1 = -1; x_2 = -\frac{2}{5}.$$

Ответ: $-1; -\frac{2}{5}.$

$$4. \quad 5x^2 - 2x - 7 = 0.$$

Решение: так как $5 - (-2) + 7 = 0$, то $x_1 = -1; x_2 = \frac{7}{5}.$

Ответ: $-1; 1\frac{2}{5}.$

$$5. \quad 6x^2 - 13x + 6 = 0.$$

Решение: здесь $6 = 3 \cdot 2$, $13 = 3^2 + 2^2$. Корни этого уравнения

$$x_1 = \frac{3}{2}; x_2 = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $\frac{2}{3}; 1\frac{1}{2}$.

6. $6x^2 + 5x + 6 = 0$.

Решение: здесь $6 = 3 \cdot 2$, но $5 = 3^2 - 2^2$ и $x_1 = \frac{2}{3}; x_2 = -\frac{3}{2}$.

Ответ: $-1\frac{1}{2}; \frac{2}{3}$.

В. Если второй коэффициент $b = 2k$ – четное число, то формулу корней

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

можно записать $x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$.

Пример:

$$3x^2 - 14x + 16 = 0.$$

Решение: имеем $a = 3$, $b = -14$, $c = 16$, $k = -7$;

$D = k^2 - ac$. $D = (-7)^2 - 3 \cdot 16 = 49 - 48 = 1$, $D > 0$, два различных
корня;

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{D}}{a} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{3} = \frac{7 \pm 1}{3}; x_1 = 2; x_2 = \frac{8}{3}.$$

Ответ: $2; 2\frac{2}{3}$.

С. Приведенное уравнение $x^2 + px + q = 0$ совпадает с уравнением общего вида, в котором $a = 1$, $b = p$ и $c = q$. Поэтому для приведенного квадратного

уравнения формула корней $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ принимает вид

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \quad \text{или}$$

$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$. Эту формулу особенно удобно использовать, когда p – четное число.

Пример:

$$x^2 - 14x - 15 = 0.$$

Решение: имеем $x_{1,2} = 7 \pm \sqrt{49 + 15} = 7 \pm \sqrt{64} = 7 \pm 8$.

$$x_1 = 15; x_2 = -1.$$

Ответ: -1;15.

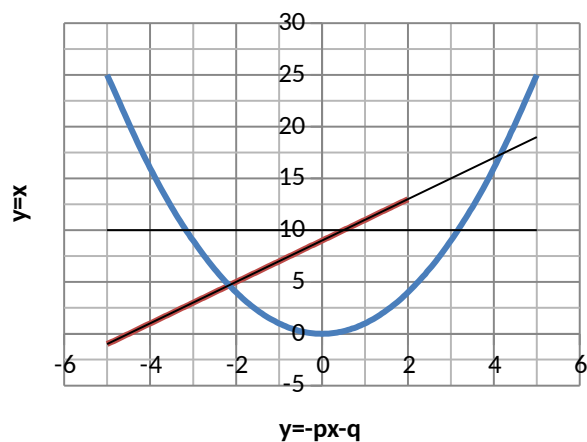
V. Графическое решение квадратного уравнения.

Если в уравнении $x^2 + px + q = 0$ перенести второй и третий члены в правую часть, то получим $x^2 = -px - q$.

Построим графики зависимостей $y = x^2$ и $y = -px - q$.

График первой зависимости – парабола,

проходящая через начало координат. График второй зависимости – прямая (рис.1).



Возможны следующие случаи:

- прямая и парабола могут пересекаться в двух точках, абсциссы точек пересечения являются корнями квадратного уравнения;
- прямая и парабола могут касаться (только одна общая точка), т.е. уравнение имеет одно решение;

- прямая и парабола не имеют общих точек, т.е. квадратное уравнение не имеет корней.

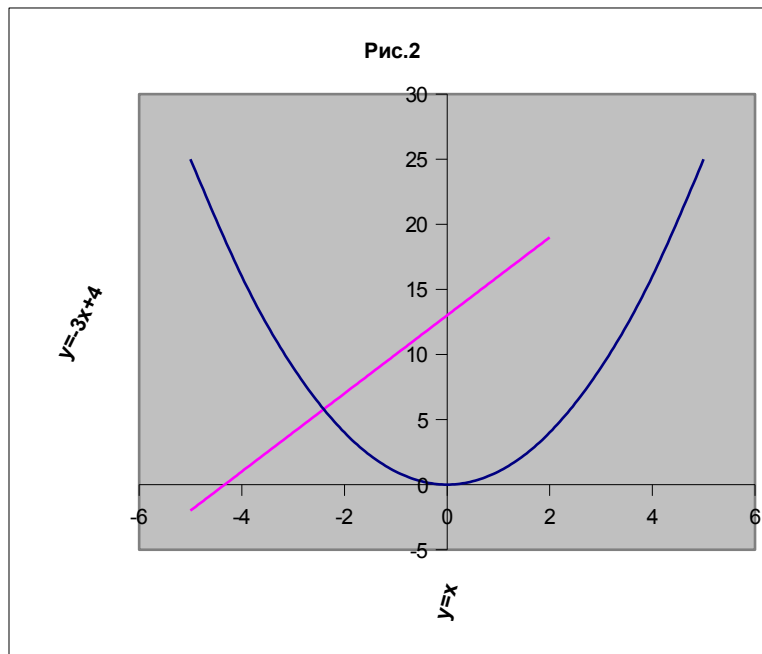
Примеры:

1. Решить графически

уравнение $x^2 - 3x - 4 = 0$.

Решение: см. рис.2.

Запишем уравнение в виде $x^2 = 3x + 4$.



Построим параболу

$y = x^2$ и прямую $y = 3x + 4$.

Прямую $y = 3x + 4$ можно построить по двум точкам $M(0;4)$ и $N(3;13)$.

Прямая и параболa пересекаются в двух точках А и В с абсциссами

$$x_1 = -1 \text{ и } x_2 = 4$$

Ответ: -1; 4.

2. Решить графически уравнение $x^2 - 2x + 1 = 0$.

Решение: см. рис. 3. Запишем уравнение в виде $x^2 = 2x - 1$.

Построим параболу $y = x^2$ и

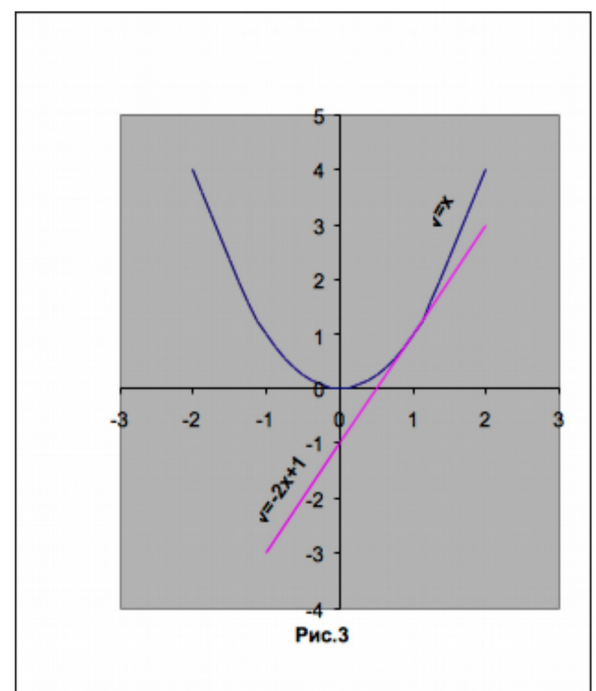
прямую $y = 2x - 1$.

Прямую $y = 2x - 1$ построим по двум

точкам $M(0;-1)$ и $N\left(\frac{1}{2};0\right)$.

Прямая и параболa пересекаются

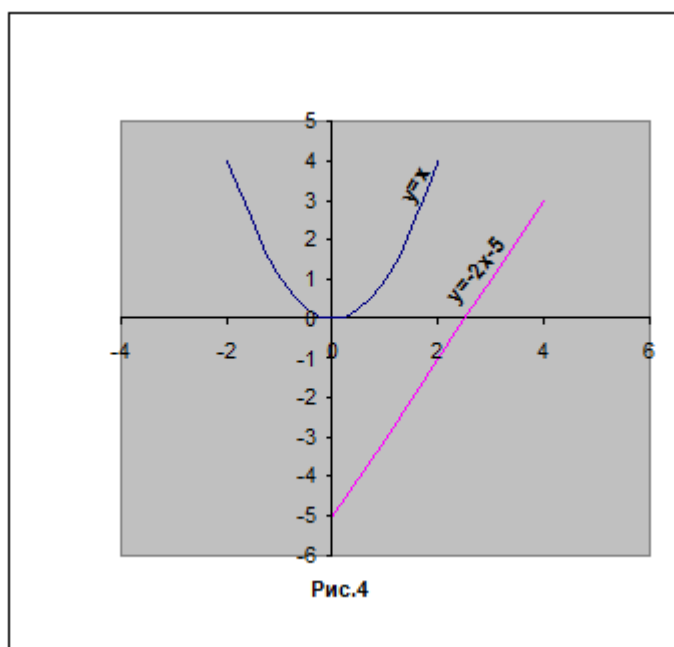
в точке А с абсциссой $x = 1$.



Ответ: 1.

3. Решить графически уравнение $x^2 - 2x + 5 = 0$.

Решение: см. рис. 4.



Запишем уравнение в виде $x^2 = 2x - 5$.

Построим параболу $y = x^2$ и прямую $y = 2x - 5$. Прямую $y = 2x - 5$ построим по двум точкам $M(0; -5)$ и $N(2,5; 0)$. Прямая и парабола не имеют общих точек пересечения, т.е. данное уравнение не имеет корней.

Ответ: нет решений.

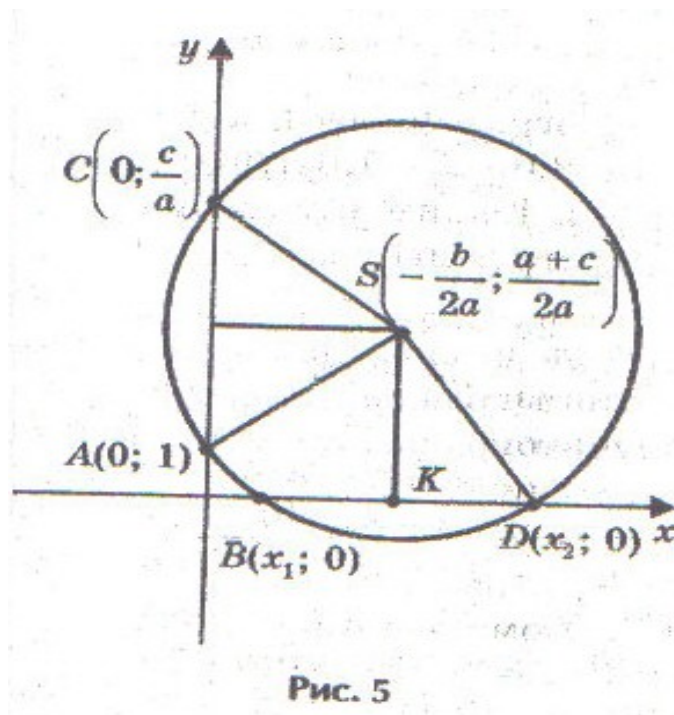
VI. Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки.

Графический способ решения квадратных уравнений с помощью параболы неудобен. Если строить параболу по точкам, то требуется много времени, и при этом степень точности получаемых результатов невелика.

Предлагаем следующий способ нахождения корней квадратного уравнения

$ax^2 + bx + c = 0$ с помощью циркуля и линейки (рис.5).

Допустим, что искомая окружность пересекает ось абсцисс в точках $B(x_1; 0)$ и $D(x_2; 0)$, где x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$,



и проходит через точки $A(0; 1)$ и $C\left(0; \frac{c}{a}\right)$ на оси ординат. Тогда по теореме

о секущих имеем $OB \cdot OD = OA \cdot OC$, откуда $OC = \frac{OB \cdot OD}{OA} = \frac{x_1 \cdot x_2}{1} = \frac{c}{a}$.

Центр окружности находится в точке пересечения перпендикуляров SF и SK , восстановленных в серединах хорд AC и BD , поэтому

$$SK = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-\frac{b}{a}}{2} = -\frac{b}{2a},$$

$$SF = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{1 + \frac{c}{a}}{2} = \frac{a + c}{2a}.$$

Итак:

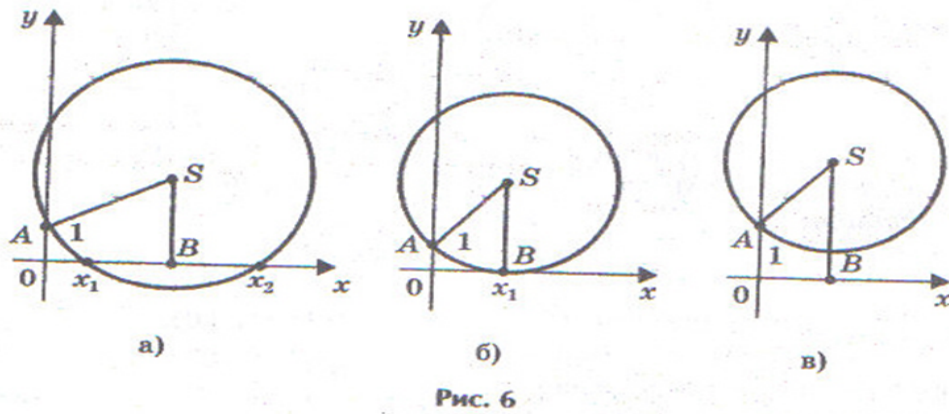
- 1) построим точки $S\left(-\frac{b}{2a}; \frac{a+c}{2a}\right)$ (центр окружности) и $A(0;1)$;
- 2) проведем окружность с радиусом SA ;
- 3) абсциссы точек пересечения этой окружности с осью Ox являются корнями исходного квадратного уравнения.

При этом возможны три случая.

1) Радиус окружности больше ординаты центра $\left(AS > SB, \text{или} R > \frac{a+c}{2a} \right)$,
 окружность пересекает ось Ox в двух точках (рис.6,а) $B(x_1;0)$ и $D(x_2;0)$, где
 x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$,

2) Радиус окружности равен ординате центра $\left(AS = SB, \text{или} R = \frac{a+c}{2a} \right)$,
 окружность касается оси Ox (рис.6,б) в точке $B(x_1;0)$, где x_1 – корень квадратного уравнения.

3) Радиус окружности меньше ординаты центра $\left(AS < SB, \text{или} R < \frac{a+c}{2a} \right)$,
 окружность не имеет общих точек с осью абсцисс (рис.6,в), в этом случае уравнение не имеет решения.



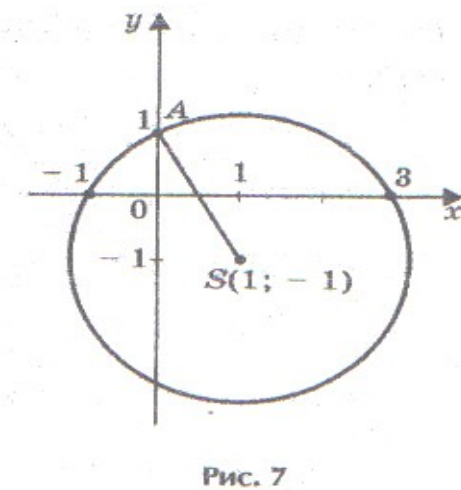
а) $AS > SB, R > \frac{a+c}{2a}$. Два решения x_1 и x_2 .

б) $AS = SB, R = \frac{a+c}{2a}$. Одно решение x_1 .

в) $AS < SB, R < \frac{a+c}{2a}$. Нет решений.

Примеры:

1. $x^2 - 2x - 3 = 0$.



Решение: см. рис.7.

определим координаты центра окружности по формулам:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1,$$

$$y = \frac{a+c}{2a} = \frac{1-3}{2 \cdot 1} = -1.$$

Проведем окружность радиуса SA, где A (0; 1), S(1; -1).

Ответ: -1; 3.

2. $x^2 - 5x + 4 = 0.$

Решение: см. рис. 8.

определим координаты

центра окружности по формулам:

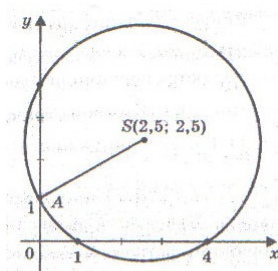


Рис. 8

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-5}{2 \cdot 1} = 2,5,$$

$$y = \frac{a+c}{2a} = \frac{1+4}{2 \cdot 1} = 2,5.$$

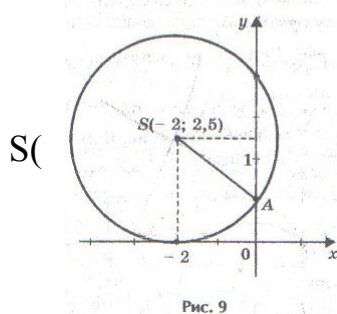


Рис. 9

Проведем окружность радиуса SA, где A (0;1),
2,5; 2,5).

Ответ: 1; 4.

3. $x^2 + 4x + 4 = 0.$

Решение: см. рис. 9.

Определим координаты центра окружности по формулам:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot 1} = -2,$$

$$y = \frac{a+c}{2a} = \frac{1+4}{2 \cdot 1} = 2,5.$$

Проведем окружность радиуса SA , где $A(0; 1)$, $S(-2; 2,5)$.

Ответ: -2.

4. $x^2 - 2x + 3 = 0$.

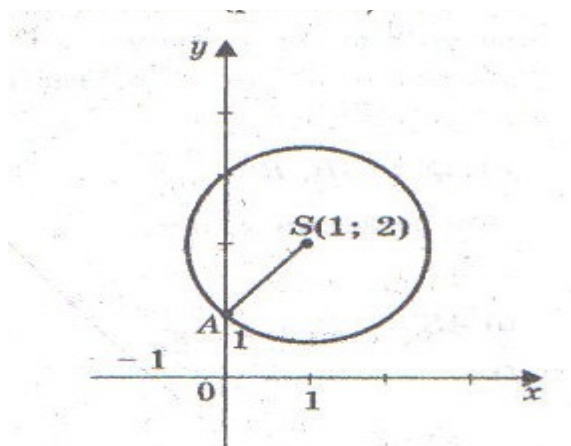


Рис. 10

Решение: см. рис. 10.

Определим координаты центра окружности по формулам:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1,$$

$$y = \frac{a+c}{2a} = \frac{3+1}{2 \cdot 1} = 2.$$

Проведем окружность радиуса SA , где $A(0;1)$, $S(1;2)$.

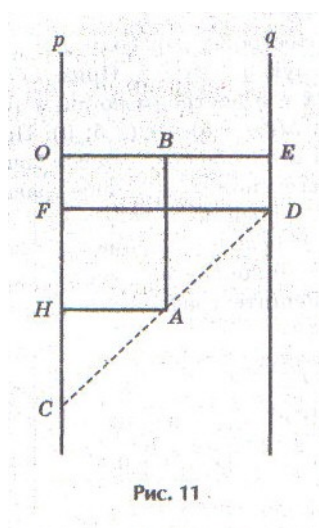
Ответ: нет решений.

VII. Решение квадратных уравнений с помощью номограммы.

Это старый и забытый способ решения квадратных уравнений. (см. Четырехзначные математические таблицы. В.М. Брадис. с.83.)

Таблица XXII. Номограмма для решения уравнения $z^2 + pz + q = 0$. Эта номограмма позволяет, не решая квадратного уравнения, по его коэффициентам определить корни уравнения.

Криволинейная шкала номограммы построена по формулам (см. рис. 11):



$$OB = \frac{a}{1+z}, AB = \frac{-z^2}{1+z}.$$

Полагая $OC = p, ED = q, OE = a$ (все в см.), из подобия треугольников CAH и CDF

получим пропорцию $\frac{p-q}{p-AB} = \frac{a}{OB}$, откуда после подстановки упрощений вытекает

уравнение $z^2 + pz + q = 0$, причем буква z означает метку любой точки криволинейной шкалы.

Примеры: 1. $z^2 - 9z + 8 = 0$.

Решение: для уравнения $z^2 - 9z + 8 = 0$ номограмма дает корни $z_1=8,0$ и $z_2=1,0$ (рис. 12).

Ответ: 1; 8.

2. $2z^2 - 9z + 2 = 0$.

Решение: разделим обе части уравнения на

2, получим уравнение $z^2 - 4,5z + 1 = 0$.

Номограмма дает корни $z_1=4$ и $z_2=0,5$.

Ответ: 0,5; 4.

3. $z^2 + 5z - 6 = 0$.

Решение: для уравнения $z^2 + 5z - 6 = 0$ номограмма дает положительный корень

$z_1=1,0$, а отрицательный корень находим, вычитая положительный корень

из $-p$, т.е. $z_2 = -p - 1 = -5 - 1 = -6,0$ (рис. 13)

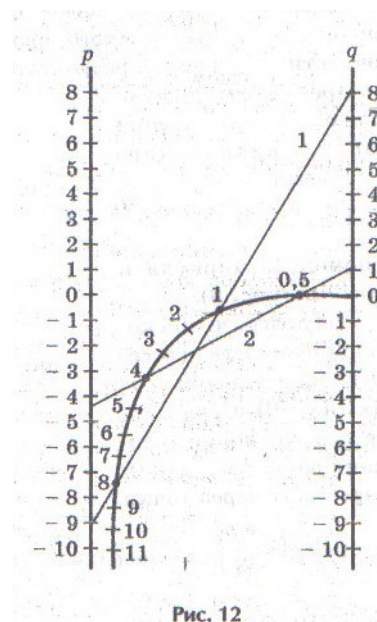


Рис. 12

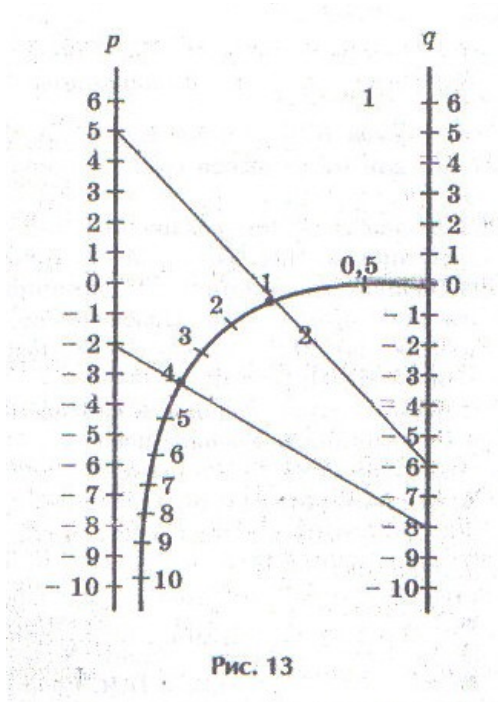


Рис. 13

Ответ: -6; 1.

$$4. z^2 - 2z - 8 = 0.$$

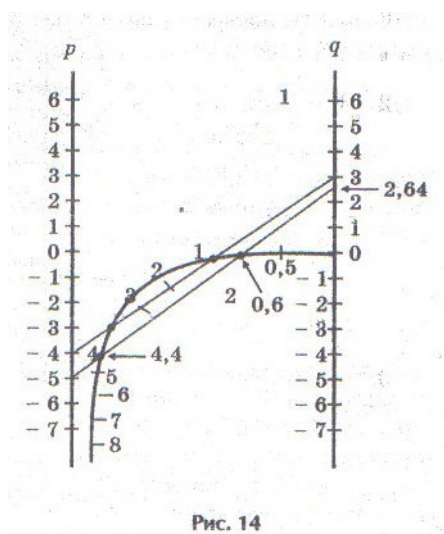
Решение: для решения уравнения $z^2 - 2z - 8 = 0$ номограмма дает положительный корень $z_1 = 4,0$, отрицательный корень равен $z_2 = -p - z_1 = 2 - 4 = -2,0$.

Ответ: -2; 4.

$$5. z^2 + 4z + 3 = 0.$$

Решение: для уравнения $z^2 + 4z + 3 = 0$, оба корня которого отрицательные

числа, берем $y_1 = -1$ и находим по номограмме два положительных корня t_1 и t_2 уравнения $t^2 - 4t + 3 = 0$, это $t_1 = 1$ и $t_2 = 3$, а затем $z_1 = -t_1 = -1$ и $z_2 = -t_2 = -3$.



Ответ: -3; -1.

Если коэффициенты p и q выходят за пределы шкалы, то выполняют подстановку

$z = kt$ и решают с помощью номограммы уравнение $t^2 + \frac{p}{k}t + \frac{q}{k^2} = 0$, где k берут с таким расчетом, чтобы имели место неравенства

$$-12,6 \leq \frac{p}{k} \leq 12,6,$$

$$-12,6 \leq \frac{q}{k^2} \leq 12,6.$$

6. $z^2 - 25z + 66 = 0$. Решение:

для уравнения $z^2 - 25z + 66 = 0$ коэффициенты p и q выходят за пределы

шкалы, выполним подстановку $z = 5t$, получим уравнение $t^2 - 5t + 2,64 = 0$, которое решаем посредством номограммы и получим $t_1 = 0,6$ и $t_2 = 4,4$, откуда

$$z_1 = 5t_1 = 5 \cdot 0,6 = 3,0$$

$$z_2 = 5t_2 = 5 \cdot 4,4 = 22,0.$$

Ответ: 3; 22.

Х. Геометрический способ решения квадратных уравнений.

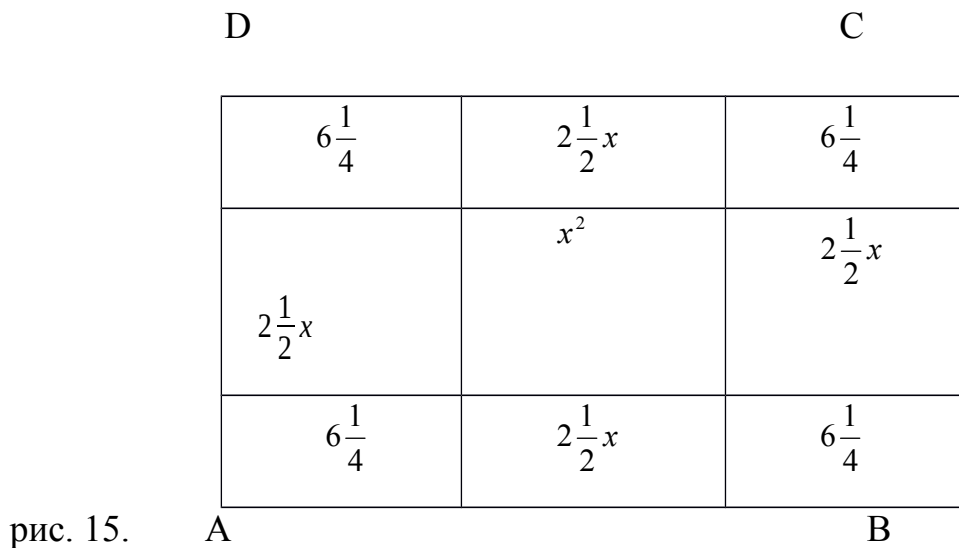
В древности, когда геометрия была более развита, чем алгебра, квадратные уравнения решали не алгебраически, а геометрически. Приведем пример из «Алгебры» ал-Хорезми.

Примеры.

1. $x^2 + 10x = 39$.

В оригинале эта задача формулируется следующим образом: «Квадрат и десять корней равны 39» (рис. 15)

Решение: Рассмотрим квадрат со стороной x , на его сторонах строятся прямоугольники так, что другая сторона каждого из них равна $2\frac{1}{2}$, а площадь $6\frac{1}{4}$.



Площадь S квадрата $ABCD$ можно представить как сумму площадей:

первоначального квадрата x^2 , четырех прямоугольников $\left(4 \cdot 2\frac{1}{2}x = 10x\right)$ и

четырех пристроенных квадратов $\left(6\frac{1}{4} \cdot 4 = 25\right)$, т.е. $S = x^2 + 10x + 25$. Заменяя $x^2 + 10x$ числом 39, получим, что $S = 39 + 25 = 64$, откуда следует, что сторона квадрата $ABCD$, т.е. отрезок $AB = 8$. Для искомой стороны x первоначального квадрата получим

$$x = 8 - 2\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2} = 3.$$

2. А вот, например, как древние греки решали уравнение $y^2 + 6y - 16 = 0$.

Решение представлено на рис. 16, где $y^2 + 6y = 16$, или $y^2 + 6y + 9 = 16 + 9$.

Решение:

Выражения $y^2 + 6y + 9$ и $16 + 9$ геометрически представляют собой один и тот же квадрат, а исходное уравнение $y^2 + 6y - 16 + 9 - 9 = 0$ – одно и то же уравнение.

Откуда и получаем, что $y + 3 = \pm 5$, или $y_1 = 2$, $y_2 = -8$ (рис. 16).

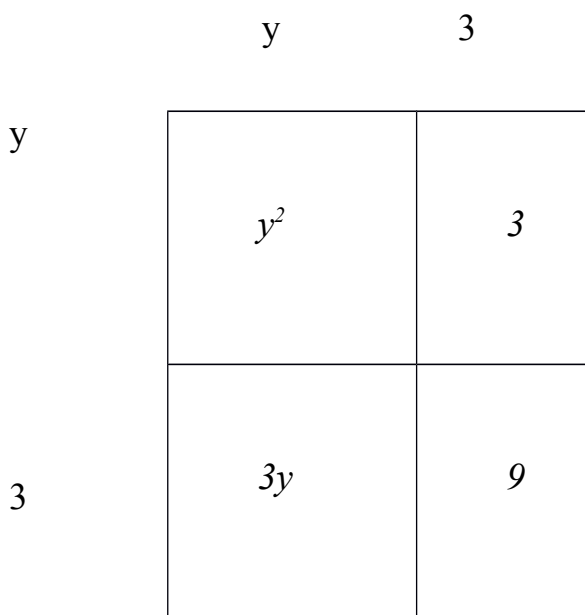


Рис. 16.

3. $y^2 - 6y - 16 = 0$.

Решение: преобразуя уравнение, получаем $y^2 - 6y = 16$.

На рис. 17 находим «изображения» выражения $y^2 - 6y$, т.е. из площади квадрата со стороной y два раза вычитается площадь квадрата со стороной, равной 3. Значит, если к выражению $y^2 - 6y$ прибавить 9, то получим площадь квадрата со стороной $y - 3$.

Заменяя выражение $y^2 - 6y$ у равным ему числом 16, получаем:
 $(y - 3)^2 = 16 + 9$,

т.е. $y - 3 = \pm\sqrt{25}$, или $y - 3 = \pm 5$, где $y_1 = 8$ и $y_2 = -2$.

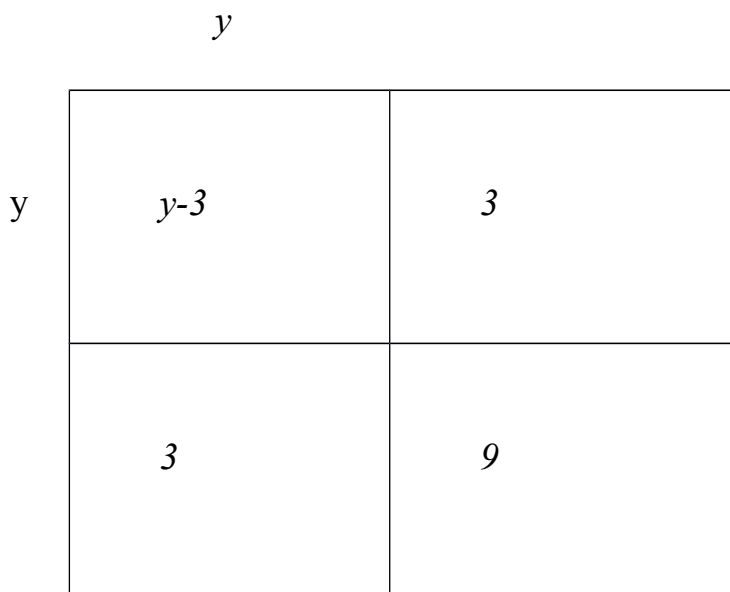


рис. 17.

Уравнения, приводимые к квадратным

$$x - \sqrt{x} - 2 = 0.$$

Решение: замена $\sqrt{x}=a$,

$$a^2 - a - 2 = 0,$$

т.к. $1+(-2)=-1$,

то $a_1=-1$; $a_2=2$.

$$\sqrt{x} = -1; \sqrt{x} = 2$$

нет решений. $x=4$. Ответ: 4.

$$2.x + \sqrt{x-1} - 3 = 0.$$

Решение: замена $\sqrt{x-1}=e$,

$$e^2 + e - 2 = 0,$$

т.к. $1+1+(-2)=0$,

то $e_1=1$, $e_2=-2$.

$$\sqrt{x-1} = 1, \sqrt{x-1} = -2.$$

$x-1=1$, нет решений.

$x=2$, Ответ: 2.

$$3.(x^2+2x) - (x+1)^2 = 55.$$

Решение: т.к. $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$, то

замена $x^2 + 2x = c$,

$$c^2 - c - 56 = 0,$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-56) = 225.$$

$$c = \frac{1 \pm \sqrt{225}}{2},$$

$$c_1 = -7,$$

$$c_2 = 8,$$

$$x^2 + 2x = -7,$$

$$x^2 + 2x = 8,$$

$$x^2 + 2x + 7 = 0,$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0,$$

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = -24,$$

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 36,$$

Нет решений.

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2},$$

$$x_1 = -4, \quad x_2 = 2. \quad \text{Ответ: } -4; 2.$$

$$4. (x^2 + x + 1)^2 - 3x^2 - 3x - 1 = 0.$$

$$\text{Решение: } (x^2 + x + 1)^2 - 3x^2 - 3x - 3 + 3 - 1 = 0,$$

$$(x^2 + x + 1)^2 - 3(x^2 + x + 1) + 2 = 0,$$

$$\text{замена } x^2 + x + 1 = t,$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0,$$

$$\text{т.к. } 1 + (-3) + 2 = 0,$$

$$\text{то } t_1 = 1,$$

$$t_2 = -2,$$

$$x^2 + x + 1 = 1,$$

$$x^2 + x + 1 = -2,$$

$$x^2 + x = 0,$$

$$x^2 + x + 3 = 0,$$

$$x(x + 1) = 0,$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -11,$$

$$x = 0 \text{ или } x + 1 = 0,$$

нет решений.

$$x = -1.$$

Ответ: -1; 0.

$$5. \frac{3x^4}{x^2 + 4x + 4} + \frac{5x^2}{x + 2} = 2.$$

Решение: замена $\frac{x^2}{x + 2} = m$, тогда $\frac{x^4}{x^2 + 4x + 4} = m^2$,

$$3m^2 + 5m - 2 = 0,$$

$$D = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 49,$$

$$m = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{6},$$

$$m_1 = -2, \quad m_2 = \frac{1}{3},$$

$$\frac{x^2}{x + 2} = -2, \quad \frac{x^2}{x + 2} = \frac{1}{3},$$

$$x^2 = -2(x + 2), \quad 3x^2 = x + 2,$$

$$x^2 + 2x + 4 = 0, \quad 3x^2 - x - 2 = 0,$$

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -12, \quad \text{т.к. } 3 + (-1) + (-2) = 0,$$

$$\text{Нет решений.} \quad \text{то } x_1 = 1, x_2 = -\frac{2}{3}.$$

$$\text{Ответ: } -\frac{2}{3}; 1.$$

$$6. (x^2 - 5x + 7)^2 - (x - 2)(x - 3) = 1.$$

$$\text{Решение: } (x^2 - 5x + 7)^2 - (x^2 - 5x + 6) - 1 = 0,$$

$$\text{замена } x^2 - 5x + 7 = t,$$

$$t^2 - t = 0,$$

$$t \cdot (t - 1) = 0,$$

$$t = 0 \quad \text{или} \quad t - 1 = 0,$$

$$t = 1,$$

$$x^2 - 5x + 7 = 0 \quad \text{или} \quad x^2 - 5x + 7 = 1,$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$

$$D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = -3, \quad D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1,$$

$$\text{Нет решений.} \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2},$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 3.$$

Ответ: 2;3.

$$7. x^2 + \frac{2}{x^2 - 3x - 2} = 5 + 3x.$$

$$\text{Решение: } x^2 + \frac{2}{x^2 - 3x - 2} - 5 - 3x = 0,$$

$$\text{замена } x^2 - 3x - 2 = n,$$

$$n - 3 + \frac{2}{n} = 0,$$

$$\frac{n^2 - 3n + 2}{n} = 0,$$

$$n^2 - 3n + 2 = 0,$$

$$n \neq 0,$$

$$\text{т.к. } 1 + (-3) + 2 = 0,$$

$$\text{то } n_1 = 1,$$

$$n_2 = 2,$$

$$x^2 - 3x - 2 = 1, \quad x^2 - 3x - 2 = 2,$$

$$x^2 - 3x - 3 = 0, \quad x^2 - 3x - 4 = 0,$$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 21, \quad D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25,$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}; \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2};$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 4.$$

$$\text{Ответ: } -1; \frac{3 - \sqrt{21}}{2}; \frac{3 + \sqrt{21}}{2};$$

8.

$$8.(x^2 - 6x)^2 - 2 \cdot (x - 3)^2 = 81.$$

$$\text{Решение: } (x^2 - 6x)^2 - 2 \cdot (x^2 - 6x + 9) = 81,$$

$$\text{замена } x^2 - 6x = z,$$

$$z^2 - 2z - 99 = 0,$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-99) = 400,$$

$$z = \frac{2 \pm \sqrt{400}}{2},$$

$$z_1 = -9; \quad z_2 = 11.$$

$$x^2 - 6x = -9, \quad x^2 - 6x = 11,$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0, \quad x^2 - 6x - 11 = 0,$$

$$(x - 3)^2 = 0, \quad D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-11) = 80,$$

$$x - 3 = 0, \quad x = \frac{6 \pm \sqrt{80}}{2},$$

$$x = 3, \quad x = 3 \pm 2\sqrt{5}.$$

Ответ: $3 - 2\sqrt{5}; 3; 3 + 2\sqrt{5}$.

$$9. \frac{2x+1}{x} + \frac{4x}{2x+1} = 5.$$

Решение: замена $\frac{2x+1}{x} = b$,

$$b + \frac{4}{b} = 5,$$

$$\frac{b^2 - 5b + 4}{b} = 0,$$

$$b^2 - 5b + 4 = 0,$$

$$b \neq 0,$$

$$b^2 - 5b + 4 = 0,$$

$$\text{т.к. } 1 + (-5) + 4 = 0,$$

$$\text{то } b_1 = 1, \quad b_2 = 4,$$

$$\frac{2x+1}{x} = 1, \quad \frac{2x+1}{x} = 4,$$

$$2x+1 = x, \quad 2x+1 = 4x,$$

$$x = -1, \quad 2x = 1,$$

$$x = 0,5.$$

Ответ: -1; 0,5.

$$10. 7\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 9.$$

Решение: замена $x + \frac{1}{x} = a$,

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = a^2,$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2,$$

$$7a - 2(a^2 - 2) = 9,$$

$$-2a^2 + 7a - 5 = 0,$$

$$\text{т.к. } (-2) + 7 + (-5) = 0,$$

$$\text{то } a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{5}{2},$$

$$x + \frac{1}{x} = 1, \quad x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2},$$

$$\frac{x^2 + 1}{x} = 1, \quad \frac{x^2 + 1}{x} = \frac{5}{2},$$

$$x^2 + 1 = x, \quad 2(x^2 + 1) = 5x,$$

$$x^2 - x + 1 = 0, \quad 2x^2 - 5x + 2 = 0,$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3, \quad D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9,$$

$$\text{Нет решений.} \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4},$$

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = 2.$$

Ответ: 0,5; 2.

$$11. \quad 4x^2 + 12x + \frac{12}{x} + \frac{4}{x^2} = 47.$$

Решение: $4\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) + 12\left(x + \frac{1}{x}\right) = 47,$

замена $x + \frac{1}{x} = a,$

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = a^2,$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2,$$

$$4a^2 - 8 + 12a = 47,$$

$$4a^2 + 12a - 55 = 0,$$

$$D = 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-55) = 1024,$$

$$a = \frac{-12 \pm \sqrt{1024}}{8},$$

$$a_1 = -5,5; \quad a_2 = 2,5,$$

$$x + \frac{1}{x} = -5,5; \quad x + \frac{1}{x} = 2,5,$$

$$\frac{x^2 + 1}{x} = -\frac{11}{2}; \quad \frac{x^2 + 1}{x} = \frac{5}{2},$$

$$2x^2 + 2 = -11x, \quad 2x^2 + 2 = 5x,$$

$$2x^2 + 11x + 2 = 0, \quad 2x^2 - 5x + 2 = 0,$$

$$D = 11^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 105, \quad D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9,$$

$$x = \frac{-11 \pm \sqrt{105}}{4}; \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4};$$

$$x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = 2.$$

$$\text{Ответ: } \frac{-11 - \sqrt{105}}{4}; \frac{-11 + \sqrt{105}}{4}; \frac{1}{2}; 2.$$

$$12. \quad \frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 5 \left(\frac{x}{3} + \frac{4}{x} \right).$$

$$\text{Решение: замена } \frac{x}{3} + \frac{4}{x} = e, \text{ тогда } e^2 = \frac{x^2}{9} + \frac{8}{3} + \frac{16}{x^2}, \quad \frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 3e^2 - 8.$$

$$3e^2 - 8 - 5e = 0;$$

$$3e^2 - 5e - 8 = 0;$$

$$\text{т.к. } 3 + 5 + (-8) = 0, \text{ то } e_1 = -1, \quad e_2 = \frac{8}{3}.$$

$$\frac{x}{3} + \frac{4}{x} = -1,$$

$$\frac{x}{3} + \frac{4}{x} = \frac{8}{3},$$

$$\frac{x^2 + 12 + 3x}{3x} = 0,$$

$$\frac{x^2 + 4 - 8x}{3x} = 0,$$

$$x^2 + 3x + 12 = 0,$$

$$x^2 - 8x + 4 = 0,$$

$$x \neq 0,$$

$$x \neq 0,$$

$$D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = -39,$$

$$D = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 12,$$

Нет решений.

$$x = 4 \pm \sqrt{12};$$

$$x = 4 - 2\sqrt{3},$$

$$x = 4 + 2\sqrt{3}.$$

Ответ: $4 - 2\sqrt{3}; 4 + 2\sqrt{3}$.

13. $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$.

Решение: пусть $x^2 \neq 0$, тогда обе части уравнения разделим на x^2 .

$$x^2 - 2x - 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0;$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0;$$

замена $x + \frac{1}{x} = \kappa,$

$$\kappa^2 - 2 - 2\kappa - 1 = 0,$$

$$\kappa^2 - 2\kappa - 3 = 0,$$

т.к. $1+2+(-3)=0$, то

$$\kappa_1 = -1;$$

$$\kappa_2 = 3.$$

$$x + \frac{1}{x} = -1;$$

$$x + \frac{1}{x} = 3;$$

$$\frac{x^2 + 1 + x}{x} = 0;$$

$$\frac{x^2 + 1 - 3x}{x} = 0;$$

$$x^2 + x + 1 = 0;$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0;$$

$$x \neq 0,$$

$$x \neq 0,$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3,$$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 5,$$

Нет решений.

$$x = 3 \pm \sqrt{5};$$

Ответ: $3 - \sqrt{5}; 3 + \sqrt{5}$.

14. $3x^2 + 15x + 2\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2.$

Решение: $3x^2 + 15x + 3 - 3 + 2\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2,$

замена $\sqrt{x^2 + 5x + 1} = c;$

$$3c^2 + 2c - 5 = 0,$$

т.к. $3+2+(-5)=0$, то

$$c_1 = 1, \quad c_2 = -\frac{5}{3};$$

$$\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 1; \quad \sqrt{x^2 + 5x + 1} = -\frac{5}{3};$$

$$x^2 + 5x + 1 = 1; \quad \text{нет решений.}$$

$$D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 21,$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2};$$

Ответ: $\frac{-5 - \sqrt{21}}{2}; \frac{-5 + \sqrt{21}}{2}.$

15. $\sqrt{12 - \frac{12}{x^2}} - x^2 + \sqrt{x^2 - \frac{12}{x^2}} = 0.$

Решение: $\sqrt{12 - \frac{12}{x^2}} = x^2 - \sqrt{x^2 - \frac{12}{x^2}};$

$$12 - \frac{12}{x^2} = x^4 - 2x^2 \sqrt{x^2 - \frac{12}{x^2}} + x^2 - \frac{12}{x^2};$$

$$2x^2 \sqrt{x^2 - \frac{12}{x^2}} = x^4 + x^2 - 12;$$

$$4x^4\left(x^2 - \frac{12}{x^2}\right) = (x^4 + x^2)^2 - 24(x^4 + x^2) + 144;$$

$$4x^4\left(x^2 - \frac{12}{x^2}\right) = x^8 + 2x^6 + x^4 - 24x^4 - 24x^2 + 144;$$

$$4x^6 - 48x^2 = x^8 + 2x^6 + x^4 - 24x^4 - 24x^2 + 144;$$

$$x^8 - 2x^6 - 23x^4 + 24x^2 + 144 = 0;$$

$$x_1 = 2;$$

$$x^8 - 2x^6 - 23x^4 + 24x^2 + 144 \big| x - 2$$

$$\begin{array}{r} x^8 - 2x^7 \qquad \qquad \qquad | x^7 + 2x^6 + 2x^5 + 4x^4 - 15x^3 - 30x^2 - 36x - 72 \\ \hline \end{array}$$

$$2x^7 - 2x^6$$

$$\begin{array}{r} 2x^7 - 4x^6 \\ \hline \end{array}$$

$$2x^6$$

$$\begin{array}{r} 2x^6 - 4x^5 \\ \hline \end{array}$$

$$4x^5 - 23x^4$$

$$\begin{array}{r} 4x^5 - 8x^4 \\ \hline \end{array}$$

$$-15x^4$$

$$\begin{array}{r} -15x^4 + 30x^3 \\ \hline \end{array}$$

$$-30x^3 + 24x^2$$

$$\begin{array}{r} -30x^3 + 60x^2 \\ \hline \end{array}$$

$$-36x^2$$

$$\begin{array}{r} -36x^2 + 72x \\ \hline \end{array}$$

$$-72x + 144$$

$$\begin{array}{r} -72x + 144 \\ \hline \end{array}$$

$$0$$

$$x^7 + 2x^6 + 2x^5 + 4x^4 - 15x^3 - 30x^2 - 36x - 72 = 0;$$

$$x_2 = -2; \quad x^7 + 2x^6 + 2x^5 + 4x^4 - 15x^3 - 30x^2 - 36x - 72 \big| \underline{x+2}$$

$$\underline{x^7 + 2x^6} \qquad \qquad \qquad | x^6 + 2x^4 - 15x^2 - 36$$

$$2x^5 + 4x^4$$

$$\underline{2x^5 + 4x^4}$$

$$-15x^3 - 30x^2$$

$$\underline{-15x^3 - 30x^2}$$

$$-36x - 72$$

$$\underline{-36x - 72}$$

0

$$x^6 + 2x^4 - 15x^2 - 36 = 0;$$

$$x_3 = 2; \quad x^6 + 2x^4 - 15x^2 - 36 \big| \underline{x-2}$$

$$\underline{x^6 - 2x^5} \qquad \qquad \qquad | x^5 + 2x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 9x + 18$$

$$2x^5 + 2x^4$$

$$\underline{2x^5 - 4x^4}$$

$$6x^4$$

$$\underline{6x^4 - 12x^3}$$

$$12x^3 - 15x^2$$

$$\underline{12x^3 - 24x^2}$$

$$9x^2 - 36$$

$$\underline{9x^2 - 18x}$$

$$18x - 36$$

$$\underline{18x - 36}$$

0

$$x^5 + 2x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 9x + 18 = 0;$$

$$x_4 = -2; \quad x^5 + 2x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 9x + 18 \big| \underline{x+2}$$

$$\begin{array}{r}
 x^5 + 2x^4 \qquad \qquad \qquad | x^4 + 6x^2 + 9 \\
 \hline
 6x^3 + 12x^2 \\
 \hline
 6x^3 + 12x^2 \\
 \hline
 9x + 18 \\
 \hline
 9x + 18 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$$x^4 + 6x^2 + 9 = 0;$$

$$(x^2 + 3)^2 = 0;$$

$$x^2 + 3 = 0;$$

$$x^2 = -3;$$

Нет решений.

Проверка:

$$x=2; \quad \sqrt{12 - \frac{12}{4}} - 4 + \sqrt{4 - \frac{12}{4}} = 0; \quad 0=0;$$

$$x=-2; \quad \sqrt{12 - \frac{12}{4}} - 4 + \sqrt{4 - \frac{12}{4}} = 0; \quad 0=0.$$

Ответ: -2; 2.

Уравнения, сводящиеся к квадратным.

1. $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0.$

Решение: пусть $x^2 = t$, тогда $4t^2 - 5t + 1 = 0,$

$$D=25-24=1>0, \quad t_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{8}, \quad t_1 = \frac{3}{4}, \quad t_2 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Если } x^2 = \frac{3}{4}, \text{ то } x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{если } x^2 = \frac{1}{2}, \text{ то } x_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$2. \quad (6x^2 - 7x)^2 - 2(6x^2 - 7x) - 3 = 0.$$

Решение: пусть $6x^2 - 7x = y$, тогда данное уравнение примет вид

$$y^2 - 2y - 3 = 0, \text{ откуда } y_1 = 3, y_2 = -1.$$

Учитывая подстановку, получим 2 квадратных уравнения:

$$a) \quad 6x^2 - 7x = 3, \quad 6x^2 - 7x - 3 = 0, \quad D = 49 + 72 = 121 = 11^2 > 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm 11}{12}, \text{ откуда } x_1 = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}; \quad x_2 = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3}.$$

$$б) \quad 6x^2 - 7x = -1, \quad 6x^2 - 7x + 1 = 0, \quad D = 49 - 24 = 25 = 5^2 > 0,$$

$$x_{3,4} = \frac{7 \pm 5}{12}, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = \frac{1}{6}.$$

Итак, данное уравнение имеет 4 корня.

$$\text{Ответ: } -\frac{1}{3}; \frac{1}{6}; 1; \frac{3}{2}.$$

$$3. \quad (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 1680.$$

Решение: запишем данное уравнение в виде

$$(x+1)(x+4)(x+2)(x+3) = 1680 \text{ или}$$

$$(x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) = 1680.$$

Пусть $x^2 + 5x + 5 = y$, тогда уравнение примет вид

$$(y-1)(y+1) = 1680 \text{ или } y^2 - 1 = 1680, y^2 = 1681,$$

$$\text{откуда } y_{1,2} = \pm 41.$$

Имеем два квадратных уравнения:

а) $x^2 + 5x + 5 = 41$, $x^2 + 5x - 36 = 0$, откуда $x_1 = -9$, $x_2 = 4$.

б) $x^2 + 5x + 5 = -41$, $x^2 + 5x + 46 = 0$, $D = 25 - 4 \cdot 46 = -159 < 0$ – нет корней.

Итак, исходное уравнение имеет два корня .

Ответ: - 9; 4.

4. $(x + 5)^2 - 13(x + 5)^2x^2 + 36x^4 = 0$.

Решение: выделим в левой части полный квадрат, для чего прибавим к обеим частям по $25(x + 5)^2x^2$.

Данное уравнение примет вид

$$(x + 5)^4 + 12(x + 5)^2x^2 + 36x^4 = 25(x + 5)^2x^2;$$

$$((x + 5)^2 + 6x^2)^2 = (5(x + 5)x)^2, \text{ откуда имеем:}$$

а) $(x + 5)^2 + 6x^2 = 5(x + 5)x$,

$$7x^2 + 10x + 25 = 5x^2 + 25x, \quad 2x^2 - 15x + 25 = 0,$$

$$D = 225 - 200 = 25 = 5^2 > 0, \quad x_{1,2} = \frac{15 \pm 5}{4}, \quad x_1 = 5, \quad x_2 = \frac{5}{2}.$$

б) $7x^2 + 10x + 25 = -5x^2 - 25x$, $12x^2 + 35x + 25 = 0$,

$$D = 1225 - 1200 = 25 = 5^2 > 0,$$

$$x_{3,4} = \frac{-35 \pm 5}{24}, \quad x_3 = -\frac{5}{4}, \quad x_4 = -\frac{5}{3}.$$

Ответ : $-\frac{5}{3}; -\frac{5}{4}; \frac{5}{2}; 5$.

$$5. \quad 2(x^2 - x + 1)^2 = x^2(8x^2 - 5x + 5).$$

Решение: запишем данное уравнение в виде

$$2(x^2 - x + 1)^2 = 5x^2(x^2 - x + 1) + 3x^4. \quad (1)$$

Заметим, что уравнение (1) является однородным относительно $x^2 - x + 1$ и x^2 и потому, разделив обе части полученного уравнения на

$x^2(x^2 - x + 1) \neq 0$, получим

$$\frac{2(x^2 - x + 1)}{x^2} = 5 + \frac{3x^2}{x^2 - x + 1}.$$

Пусть $\frac{x^2 - x + 1}{x^2} = y$, тогда имеем $2y = 5 + \frac{3}{y}$,

$$2y^2 - 5y - 3 = 0, \quad D = 25 + 24 = 49 = 7^2 > 0,$$

$$y_{1,2} = \frac{5 \pm 7}{4}, \quad y_1 = 3, \quad y_2 = -\frac{1}{2}.$$

Учитывая подстановку, получим два квадратных уравнения:

$$a) \quad \frac{x^2 - x + 1}{x^2} = 3,$$

$$3x^2 = x^2 - x + 1 \quad \text{или} \quad 2x^2 + x - 1 = 0,$$

$$D = 9 = 3^2 > 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{4}, \quad x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = -1.$$

$$б) \quad \frac{x^2 - x + 1}{x^2} = -\frac{1}{2},$$

$$2x^2 - 2x + 2 = -x^2, \quad 3x^2 - 2x + 2 = 0,$$

$$\frac{D}{4} = 1 - 6 = -5 < 0 - \text{нет корней}.$$

Итак, исходное уравнение имеет два корня.

Ответ: $-1; \frac{1}{2}$.

$$6. \quad x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0.$$

Решение: уравнение можно решить, перебирая все делители свободного члена. Однако это уравнение допускает более короткое и изящное решение:

$(x^2 - 5x)^2 + 10(x^2 - 5x) + 24 = 0$, откуда по обратной теореме Виета получим $x^2 - 5x = -4$ или $x^2 - 5x = -6$.

Если $x^2 - 5x = -4$, то $x^2 - 5x + 4 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$,

если $x^2 - 5x = -6$, то $x^2 - 5x + 6 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

Ответ: 1 ; 2 ; 3 ; 4 .

Распадающиеся уравнения.

$$1. \quad (x^2 - 5x + 6)(x^2 + x - 2) = 0. \quad (1)$$

Решение: если число x_0 есть корень уравнения (1), то подставляя x_0 вместо x в уравнение (1), получим верное числовое равенство

$$(x_0^2 - 5x_0 + 6)(x_0^2 + x_0 - 2) = 0. \quad (2)$$

Но произведение двух чисел равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Поэтому из (2) следует, что x_0 есть корень хотя бы одного из уравнений

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \quad (3) \text{ или } x^2 + x - 2 = 0 \quad (4).$$

С другой стороны, любой корень любого из уравнений (3) или (4) есть корень уравнения (1).

Таким образом, множество всех корней уравнения (1) есть объединение множества всех корней уравнения (3) и множества всех корней уравнения (4).

Уравнение (3) имеет корни $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$, а уравнение (4) – корни $x_3 = -2$ и $x_4 = 1$.

Следовательно, уравнение (1) имеет корни -2; 1; 2; 3 и других корней не имеет.

Ответ: -2; 1; 2; 3.

Говорят, что уравнение распадается на два уравнения, если множество всех его корней есть объединение множества всех корней этих двух уравнений.

$$2. \quad x^3 - 1 = 0.$$

Решение: это уравнение распадается на два уравнения:

$$x - 1 = 0 \text{ и } x^2 + x + 1 = 0,$$

потому что $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$.

Первое уравнение имеет корень $x = 1$, второе уравнение не имеет корней.

Следовательно, данное уравнение имеет единственный корень $x = 1$.

Ответ: 1.

$$3. \quad x^6 - 1 = 0.$$

Решение: уравнение распадается на три уравнения:

$$x - 1 = 0, x + 1 = 0 \text{ и } x^4 + x^2 + 1 = 0,$$

потому что $x^6 - 1 = (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^4 + x^2 + 1)$.

Первые два уравнения имеют корни $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$, третье же уравнение не имеет корней, т.к. это биквадратное уравнение при замене $x^2 = y$, получаем квадратное уравнение $y^2 + y + 1 = 0$, которое не имеет корней т.к. $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$.

Следовательно, данное уравнение имеет два корня.

Ответ: -1 ; 1 .

4. $x^3 - 2x^2 - 3x = 0.$

5. Решение: так как $x^3 - 2x^2 - 3x = x(x^2 - 2x - 3),$

то данное уравнение распадается на два уравнения

$x = 0$ и $x^2 - 2x - 3 = 0.$

Второе имеет два корня $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2,$

тогда данное уравнение имеет три корня.

Ответ: - 1; 0; 3.

В целом можно сказать, что освоение темы «Квадратные уравнения» поднимает учащихся на качественно новую ступень овладения содержанием школьной математики.

2.Методико-педагогические основы обучения решению квадратных уравнений

2.1. Реализация требований ФГОС ООО при изучении темы «Квадратные уравнения» в 8 классе

Тема: «Квадратные уравнения» 8 класс

Основная цель – *выработать умения решать квадратные уравнения, простейшие рациональные уравнения и применять их к решению задач.*

Перечень изучаемых понятий

- Основные понятия (определение квадратного уравнения полного (приведённого), неполного квадратного уравнения).
- Обзор известных способов решения квадратных уравнений.
- Формула корней квадратного уравнения.

- Решение задач с помощью квадратных уравнений.
- Теорема Виета.
- Решение дробных рациональных уравнений.
- Решение задач с помощью рациональных уравнений.

Знания. Умения. Навыки.

Знать:

- определение квадратного уравнения, неполных квадратных уравнений;
- определение приведённого квадратного уравнения;
- формулы дискриминанта и корней квадратного уравнения, теорему Виета и обратную ей.

Уметь:

- решать все виды неполных квадратных уравнений;
- решать квадратные уравнения выделением квадрата двучлена, с помощью формулы;
- решать задачи с помощью квадратных уравнений;
- решать приведённые квадратные уравнения с помощью теоремы Виета.

Этапы изучения темы «Квадратные уравнения»

I этап – «Решение неполных квадратных уравнений».

II этап – «Решение полных квадратных уравнений и приведенных квадратных уравнений».

III этап - «Решение задач с помощью квадратных уравнений».

Цели обучения темы «Квадратные уравнения»

1) познавательные; 2) регулятивные; 3) коммуникативные; 4) личностные.

Ц 1: приобретение учебной информации и развитие интеллектуальных умений при изучении: а) понятий; б) теорем; в) типов задач

Ц 2: контроль усвоения теоретических знаний: а) геометрических понятий; б) теорем; в) типов и классов задач;

Ц3: применение знаний и интеллектуальных умений при решении геометрических и учебных задач

Ц 4: развитие коммуникативных умений через: включение в групповую работу; взаимопомощь, рецензирование ответов; организацию взаимоконтроля и взаимопроверки на всех этапах УПД

Ц 5: развитие организационных умений (целеполагание, планирование, реализация плана, саморегуляция УПД

Учебный план темы «Квадратные уравнения»

Тема «Квадратные уравнения» разбита на 11 часов:

1. Определение квадратного уравнения. Неполные квадратные уравнения (2 ч.).

Знать: определение квадратного уравнения; неполного квадратного уравне-

ния, приведенного.

Уметь решать неполные квадратные уравнения.

2. Формула корней квадратного уравнения (3 ч.).

Знать определение дискриминанта, формулы дискриминанта и корней

Уметь выделять квадрат двучлена, решать квадратное уравнение по этим формулам; определять количество корней.

3. Самостоятельная работа (1 ч.).

4. Решение задач с помощью квадратных уравнений (2 ч.).

Уметь решать задачи с помощью квадратных уравнений.

5. Теорема Виета (2ч.).

Знать теорему Виета и обратную ей (доказательство); формулы для решения уравнения по т. Виета.

Уметь находить корни по т. Виета и коэффициенты по уже известным корням уравнения.

6. Контрольная работа: «Квадратные уравнения» (1ч.)

<i>Тема и номер урока в теме</i>	<i>Решение квадратных уравнений по формуле 6 урок из 11</i>
<i>Базовый учебник</i>	<i>Ю.Н.Макарычев, Н.Г.Миндюк, К.И. Нешиков, С.Б. Суворова; под ред. С. А. Теляковского. Алгебра 8 класс, М.: Просвещение, 2008г</i>
<i>Тип урока</i>	<i>Урок применения и закрепления знаний</i>
<i>Методы</i>	<ul style="list-style-type: none"> ▪ <i>Репродуктивный</i> ▪ <i>Частично-поисковый</i> ▪ <i>Проблемно-поисковый</i>
<i>Формы организации познавательной деятельности</i>	<ul style="list-style-type: none"> ▪ <i>Индивидуальная</i> ▪ <i>Групповая</i>
	<ul style="list-style-type: none"> ▪ <i>Коллективная</i>
<i>Оборудование</i>	<i>Учебник «Алгебра 8 кл.», мультимедийный проектор, карточки с заданиями, компьютер.</i>

Цели:

- Обучающие (формирование познавательных и логических УУД)- закрепить навыки решения квадратных уравнений по формуле;
- Развивающие (формирование регулятивных УУД) — развивать умение ставить перед собой цель, планировать свою работу, развивать логическое мышление, память, внимание, умения сопоставлять, анализировать, делать выводы;
- Воспитательные (формирование коммуникативных и личностных УУД) — учиться работать в группах, развивать взаимовыручку, умение вы-

слушивать мнения товарищей, отстаивать свою точку зрения, учиться умению строить речевое высказывание в устной и письменной форме.

Ход урока

I.Организационный момент. Целеполагание и мотивация. (2 мин.)

II. Проверка домашнего задания.

Актуализация опорных знаний (устные упражнения) (7 мин.)

*Сформулируйте определение квадратного уравнения?

*Какова формула нахождения корней квадратного уравнения?

*Какие из записанных ниже уравнений являются неполными квадратными?

1. $x^2 + 2x - 9 = 0,$
2. $2x^2 + 16x = 0,$
3. $7x^2 = 0,$
4. $x^2 - 3x + 1 = 0,$
5. $3x^2 - 2x + 19 = 0,$
6. $7x^2 - 14x = 0.$

*Сформулируйте определение неполного квадратного уравнения?

*Как называются уравнения № 1, № 4?

*Сформулируйте определение приведённого квадратного уравнения?

*Назовите числа, которые являются корнями уравнений?

1.
 $x^2 + 3x = 0;$
2.
 $5x^2 = 0;$
3.
 $x^3 + 8x = 0;$
4.
 $x^3 - 4x = 0.$

3 -2 -1 0 1 2 3

Найдите дискриминант и определите число корней уравнения.

$$x^2_2 - 5x + 4 = 0;$$

$$5x^2_2 - 4x - 1 = 0;$$

$$4x^2_2 - 4x + 1 = 0.$$

III. Работа с изученным материалом

Работа в группах (9 мин.)

<u>1. Соотнесите уравнения и способы их решения</u>				
Уравнение	№	Результат	№	Способ решения уравнения
$2x^2 - 11x + 5 = 0$	1	<u>1 – ...</u>	1	С помощью извлечения квадратного корня
$3x^2 + 5x + 2 = 0$	2	<u>2 – ...</u>	2	С помощью выделения полного квадрата
$x^2 = 5$	3	<u>3 – ...</u>	3	С помощью формулы $(a + b)^2$
$7x^2 + 14x = 0$	4	<u>4 – ...</u>	4	С помощью алгоритма решения уравнения $ax^2 + bx + c = 0$
$x^2 + 4x + 4 = 0$	5	<u>5 – ...</u>	5	С помощью разложения разности квадратов?
$x^2 - 4 = 0$	6	<u>6 – ...</u>	6	С помощью вынесения общего множителя за скобки?
$x^2 + 4x - 5 = 0$	7	<u>7 – ...</u>	7	С помощью разложения на множители способом группировки
Учащиеся сверяют свои ответы с верными, оценивают себя. (1 – 4, 2 – 7, 3 – 1, 4 – 6, 5 – 3, 6 – 5, 7 – 2)				

IV.Создание проблемной ситуации (9 мин.)

Определите вид уравнения

$$3(x + 6)^2 + 2010(x + 6) - 2013 = 0$$

Каким способом можно решить данное уравнение?

(Способ – введение новой переменной $x + 6 = t$)

Какое уравнение получим? ($3t^2 + 2010t - 2013 = 0$)

Сколько времени потребуется на решение уравнения? Почему?

(Идет обсуждение)

Решите уравнение

I группа

1. Определите вид уравнения $x^2 + 4x - 5 = 0$
2. Найдите корни данного уравнения
3. Найдите $a + b + c$ и $\frac{c}{a}$
4. Сделайте вывод

II группа

5. Определите вид уравнения $3x^2 + 5x + 2 = 0$
6. Найдите корни данного уравнения
7. Найдите $a - b + c$ и $-\frac{c}{a}$

Сделайте вывод

1. Корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Частный случай №1:

Если $a + b + c = 0$, то $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{c}{a}$.

Частный случай №2:

Если $a + c = b$, то $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{c}{a}$.

V. Физминутка (гимнастика для глаз) (1 мин.)

VI.Самостоятельная работа (10 мин.)

Организовывается работа по применению ЭОР (работа за компьютером). Прослеживается индивидуальная траектория каждого ученика, проверяется правильность выполненной работы.

<http://fcior.edu.ru/card/6769/reshenie-kvadratnyh-uravneniy-po-formule-p1.html>

Тема урока: Решение квадратных уравнений.

Место урока в учебном плане (программе) — Глава III. Квадратные уравнения, 10-ый урок по теме главы.

Цель урока: систематизировать знания учащихся по теме: «Квадратные уравнения».

Задачи урока: а) *образовательные*: продолжить работу над формированием таких математических умений, как решение неполных квадратных уравнений, решение квадратных уравнений по формуле, решение тестовых задач; создать условия самоконтроля и взаимоконтроля.

б) *развивающие*: развитие навыков контроля и самоконтроля, развитие памяти, математической речи.

в) *воспитательные*: воспитание у учащихся аккуратности, вычислительной культуры.

Оборудование: таблица с формулами, компьютер, набор карточек.

Тип урока: урок систематизации знаний, обобщения умений и навыков учащихся.

План урока.

- I. Организационный момент. (3 мин.)
- II. Актуализация опорных знаний. (10 мин.)
- III. Тренировочные упражнения. (20 мин.)
- IV. Самостоятельная работа. (10 мин.)
- V. Итог урока. (2 мин.)

Ход урока.

I. Организационный момент.

- определение целей и задач урока;
- определение плана учебной деятельности;
- задание на дом: п. 19-24. № 654(а, б) № 671(а), индивидуальное задание (для более подготовленных учащихся): в квадратном уравнении

$6x^2 + vx + 18 = 0$ найдите v , если известно, что корни уравнения - целые числа.

II. Актуализация опорных знаний.

Устная работа.

1. Установите истинность высказываний. (Слайды)
2. Работа по вариантам: (раздаются каждому)

I ВАРИАНТ

1. Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c - заданные числа, а $a \neq 0$, x - переменная, называется...

2. Полное квадратное уравнение не имеет корней, если $D < 0$...

3. Уравнение вида $x^2 + px + q = 0$ называется...
4. Квадратное уравнение имеет два корня, если $b^2 - 4ac$...
5. Дано уравнение $3x^2 - 7x + 4 = 0$. $D = \dots$

II ВАРИАНТ

1. Если $ax^2 + bx + c = 0$ квадратное уравнение, то a ... коэффициент, c ...
2. Уравнение $x^2 = a$, где $a < 0$, не имеет...
3. Полное квадратное уравнение имеет единственный корень, если $b^2 - 4ac$...
4. Уравнение вида $ax^2 + c = 0$, где $a \neq 0$, $c \neq 0$, называют ... квадратным уравнением.
5. Дано уравнение $x^2 - 6x + 8 = 0$. $D = \dots$

Выполняем взаимопроверку.

III. Тренировочные упражнения.

1. Решите квадратное уравнение $5(x-2) = (3x+2)(x-2)$
2. Один из корней квадратного уравнения равен 7. Найдите коэффициент p и второй корень уравнения $x^2 + px - 42 = 0$.
3. Решите задачу с помощью квадратного уравнения.
Фотография размером 12 см на 18 см наклеена на лист так, что получилась рамка одинаковой ширины. Определите ширину рамки, если известно, что фотокарточка вместе с рамкой занимает площадь 280 см^2 .

IV. Самостоятельная работа (из материалов подготовки к ГИА) в виде теста.(
карточки –задания и карточки –бланки ответов раздаются на каждого учени-
ка)

Карточка –задание.

A ₁	<p>Какие из уравнений являются квадратными?</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $7x^2-13x+4=0$ 2. $1-12x=0$ 3. $2x^3-4x^2+5x-1=0$
A ₂	<p>Какое из уравнений является приведенным?</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $2x^2-7x-1=0$ 2. $-x^2-3x+4=0$ 3. $x^2+6x-4=0$
A ₃	<p>Назовите коэффициенты квадратного уравнения</p> $5x^2-9x+4=0.$ <ol style="list-style-type: none"> 1. $a=5; b=-9; c=4$ 2. $a=5; b=9; c=4$ 3. $a=4; b=-9; c=5.$
A ₄	<p>Найдите сумму корней квадратного уравнения</p> $x^2-16x+28=0.$ <ol style="list-style-type: none"> 1. 16. 2. 28. 3. -16.
A ₅	<p>Найдите произведение корней квадратного уравнения</p>

	$y^2 + 42y - 28 = 0$. 1.42. 2. -28 3.28
B ₁	Решите неполное квадратное уравнение $5x^2 + 15 = 0$ и запишите ответ
B ₂	Решите полное квадратное уравнение $2x^2 - 3x - 2 = 0$ и запишите ответ
C	Решите задачу, подробно описав решение Периметр прямоугольника равен 30см. Найдите стороны прямоугольника, если известно, что площадь прямоугольника равна 56 см^2 .

V. Итог урока.

Используемые образовательные технологии: технологии поддерживающего обучения (традиционного обучения, разноуровневого обучения); личностно ориентированные технологии обучения; технологии развивающего обучения (проблемного обучения).

Используемый УМК: — Алгебра. 8 класс: поурочные планы по учебнику Ю.Н. Макарычева и др. / авт.-сост. Т.Л. Афанасьева, Л.А. Тапилина. — Волгоград: Учитель, 2007. — 303 с.;

— Алгебра: Учеб. для 8 кл. общеобразоват. учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк и др.; под ред. С.А. Теляковского. М.: Просвещение, 2008;

— Государственный стандарт основного общего образования по математике;

-Дидактические материалы по алгебре для 8 класса / В.И. Жохов, Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк. — М.: Просвещение, 2006. — 144 с.

-Нестандартные уроки алгебры. 8 класс. / Сост. Н.А. Ким. — Волгоград: ИТД

«Корифей», 2006. – 112 с;

-Программы общеобразовательных учреждений. Алгебра. 7-9 классы. Составитель: Бурмистрова Т.А. – М.: Просвещение, 2009 г.;

-<http://school-collection.edu.ru/> – единая коллекция цифровых образовательных ресурсов.

Заключение

Автором была выполнена курсовая работа по теме «Формирование умения решения квадратных уравнений в 8-ом классе». При выполнении данной работы понадобились не только те знания, которые имеются у самого автора, но и необходимая работа с дополнительной литературой, составление конспектов уроков.

Благодаря выполнению этой работы можно сказать, что материал, связанный с уравнениями, составляет значительную часть школьного курса математики. На изучение темы «Квадратные уравнения» по программе дается всего 22 ч. Их изучение в современной методике математики связано с тремя главными областями своего возникновения и функционирования: прикладная направленность, теоретико-математическая направленность и направленность на установление связей с остальным содержанием курса математики.

Для этой темы характерна большая глубина изложения и богатство устанавливаемых с ее помощью связей в обучении, логическая обоснованность изложения. Поэтому она занимает исключительное положение в линии уравнений и неравенств. К изучению темы «Квадратные уравнения» учащиеся приступают, уже накопив определенный опыт, владея достаточно большим запасом алгебраических и общематематических представлений, понятий,

умений. владение содержанием линии уравнений позволяет расширить список выполнимых преобразований. Так, умение решать квадратные уравнения позволяет осуществлять сокращение дробей, в числителе или знаменателе которых имеется квадратный трехчлен. В итоге изучения материала линии уравнений учащиеся должны не только овладеть применением алгоритмических предписаний к решению конкретных заданий, но и научиться использовать логические средства для обоснования решений в случаях, когда это необходимо.

Список литературы

- 1) Алгебра: Учеб. для 8 кл. общеобразоват. учреждений / С.М. Никольский, М.К. Потапов и др. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2003. – 287 с.
- 2) Алгебра: Учеб. для 8 кл. общеобразоват. учреждений / Ш.А.Алимов, Ю.М.Колягин, Ю.В.Сидоров и др. – 10-е изд. – М.: Просвещение, 2003. – 255с.
- 3) Башмаков М.И. Алгебра: учеб. для 8 кл. общеобразоват. учреждений. – М.: Просвещение, 2004. – 287с.
- 4) Бекаревич А.Б. Уравнения в школьном курсе математики. – М., 1968.– 196 с.
- 5) Бурмистрова Т.А. Программы общеобразовательных учреждений // Математика.- М.: Просвещение, 1994.
- 6) Глейзер Г.И. История математики в школе VII – VIII классы. – М., 1982.
- 7) Колягин Ю.М. Методика преподавания математике в средней школе. Частные методики. – М.: Просвещение, 1977.
- 8) Лягущенко Е.И. Методика обучения математике в 5 кл. – Минск, 1976.

9) Маркушевич Л.А., Черкасов Р.С. Уравнения и неравенства в заключительном повторении курса алгебры средней школы // Математика в школе. – 1994. - №1. – с.

10) Методика и технология обучения математике. Курс лекций: пособие для вузов / под ред. Н.Л.Стефановой, Н.С. Подходовой. – М.: Дрофа, 2005. – 416 с.

11) Мишин В.И. Методика преподавания математики в средней школе. – М., 1990.

12) Оганесян В.А. Методика преподавания математики в средней школе. – М.: Просвещение, 1980. – 368 с.

13) Панкратова Л. Обобщающий урок по теме «Квадратные уравнения» в форме игры «Звездный час» // Математика.-2002.-№21.

14) Сабинина Л.В. Методика в понятиях и терминах. Ч.1. – М.: Просвещение, 1978. – 320 с.

15) Столяр А.А. Общая методика преподавания математики. – М., 1985.

16) Шаталова С. Урок – практикум по теме «Квадратные уравнения».- 2004. -№42

17) 14. Мордкович, А.Г. Алгебра.8 кл.: Метод. пособие для учителя/ А.Г. Мордкович. - М.: Мнемозина, 1999.