**Ремчукова Татьяна Владимировна**

**МБОУ СОШ № 12**

**Метапредметный подход в образовании как способ формирования ключевых компетенций школьников**

Метапредметный подход – подход к образованию, при котором ученик не только овладевает системой знаний, но и усваивает универсальный способы действий, с помощью которых он сможет сам добывать информацию.

В результате создания проблемной ситуации и ведения проблемного диалога, учащиеся сами формулируют образовательную цель урока. Таким образом, учащиеся приобретают навыки целеполагания и планирования дальнейшей деятельности.

*Метапредметная проблемная ситуация* – спровоцированное (созданное) учителем состояние интеллектуального затруднения ученика, когда он обнаруживает, что для решения поставленной перед ним  задачи ему недостаточно имеющихся предметных знаний и умений, и осознает необходимость их внутрипредметной и метапредметной интеграции.

Проблемная ситуация устанавливает у учащегося границу между знанием и незнанием.

Метапредметные образовательные результаты предполагают, что у обучающихся будут развиты:

использование умений и навыков различных видов познавательной деятельности, применение основных методов познания (системно-информационный анализ, моделирование) для изучения различных сторон окружающий действительности;

использование основных интеллектуальных операций: формирование гипотез, анализ и синтез, сравнение, обобщение, систематизация, выявление причинно-следственных связей, поиск аналогов;

умение генерировать идеи и определять средства, необходимые для их реализации;

умение определять цели и задачи деятельности, выбирать средства реализации цели и применять их на практике;

использование различных источников для получения информации, понимание зависимости содержания и формы представления информации от целей коммуникации и адресата.

**Компетентностный подход к обучению – приоритетное направление модернизации образования**

Проблеме качественного образования на всех ступенях образовательного процесса обозначена в приоритетных программах Президента РФ, Концепции модернизации образования.

Компетентностный подход к обучению становится приоритетным направлением модернизации образования. Главная идея компетентностного подхода — формирование профессиональной компетентности специалиста, о которой можно судить по тем умениям и навыкам, которые специалист применяет для решения сложных профессиональных и жизненных ситуаций.

Отсюда одной из наиболее важных задач современной системы образования является формирование ключевых компетенций учащихся. Появляется потребность в формировании таких качеств личности, как способность человека воспринимать новое, быстро менять различные виды деятельности, умение работать творчески, адаптироваться в современном обществе.

Компетентностно-ориентированный подход – один из новых концептуальных ориентиров направлений развития содержания образования.

Появление компетентностного образования – это ответ на вызовы общества, его главная идея – это обеспечение органичной связи школы с жизнью, обучение учащихся еще в стенах школы способности эффективно действовать за пределами учебных ситуаций и сюжетов.

По мнению современных педагогов, само приобретение жизненно важных компетентностей дает человеку возможность ориентироваться в современном обществе, формирует способность личности быстро реагировать на запросы времени.

Под понятием «компетентностный подход» имеют в виду направленность процесса обучения на формирование и развитие ключевых (базовых, основных) и предметных компетентностей личности. Результатом этого процесса будет формирование общей компетентности человека, что является совокупностью ключевых компетентностей, интегрированной характеристикой личности. Такая характеристика должна сформироваться в процессе обучение и содержать знание, навыки, опыт отношений, опыт деятельности.

Компетентностный подход в образовании связан с личностно-ориентированным и действующим подходами к образованию, поскольку касается личности ученика и может быть реализованным и проверенным только в процессе выполнения конкретным учеником определенного комплекса действий.

**Государственный образовательный стандарт как ориентир и инструмент развития математического образования**

Приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 17 декабря 2010 года был принят Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования – стандарт второго поколения. Стандарт устанавливает требования к результатам освоения обучающимися основной образовательной программы основного общего образования:личностным, метапредметным, предметным.

Все результаты (цели) освоения учебно-методического курса образуют целостную систему вместе с предметными средствами. Их взаимосвязь можно увидеть на схеме 1.

*Результаты обучения* Схема 1.

**Результаты обучения**

**Личностные**

**Метапредметные**

**Предметные**

Регулятивные

Коммуникативные

Познавательные

Установленные стандартом новые требования к результатам обучающихся вызывают необходимость в изменении содержания обучения на основе принципов метапредметности как условия достижения высокого качества образования. Учитель сегодня должен стать конструктом новых педагогических ситуаций, новых заданий, направленных на использование обобщенных способов деятельности и создание учащимися собственных продуктов в освоении знаний.

В настоящее время формирование метаумений становится центральной задачей любого обучения.

Современный подход к организации содержания процесса обучения представлен в двух уровнях: предметном и метапредметном (см. схему 2 ).

Схема 2.

*Содержание образования (метапредметный уровень)*

**Метапредметный уровень**

**Метадеятельность (мыследеятельность)**

**Метазнания**

**Метаспособы**

**Предметный уровень**

Таким образом, метапредметный подход обеспечивает переход от существующей практики дробления знаний на предметы к целостному образному восприятию мира, к метадеятельности. Метапредметные (компетентностные) результаты образовательной деятельности – это способы деятельности, применимые как в рамках образовательного процесса, так и при решении проблем в реальных жизненных ситуациях, освоенные обучающимися на базе одного, нескольких или всех учебных предметов. Метапредметность как принцип интеграции содержания образования, как способ формирования теоретического мышления и универсальных способов деятельности обеспечивает формирования целостной картины мира в сознании ребёнка. При таком подходе у учащихся формируется подход к изучаемому предмету как к системе знаний о мире.

Обучение школьников метапредметным знаниям требует совместного участия учителей математики и учителей предметников.

**Формирование метапредметных компетентностей**

**на уроках математики**

Метапредметный урок - это урок, целью которого является обучение переносу теоретических знаний по предметам в практическую жизнедятельность учащегося,подготовка учащихся к реальной жизни и формирование способности решать личностно-значимые проблемы, формирование ключевых компетенций.

Метапредметный урок-это урок, с помощью которого происходит не только познавательное, но и личностное развитие учащегося, а также формирование у него собственной системы мировоззрения, обеспечивается целостность представлений ученика об окружающем мире как необходимый и закономерный результат его познания.

Признаки метапредметного урока:

- самостоятельная (экспериментальная, поисковая и т.д.) учебная деятельность учащихся;

- рефлексия, перевод теоретических представлений в плоскость личностных рассуждений и выводов;

- активизация интереса и мотивации обучения учащихся путём привлечения к предмету урока других областей знаний и опоры на личный практический опыт учащегося.

**Сравнительная характеристика метапредметного урока, интегрированного урока и урока с межпредметными связями.**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| №п/п | Метапредметный урок | Интегрированный урок | Урок с межпредметными связями |
| 1. | цель: личностное  совершенствование учащегося через его познавательное развитие | цель: глубокое усвоение знаний за счёт обобщения, систематизации ЗУНов по нескольким предметным областям (реализация межпредметных связей) | цель: закрепление знаний учащихся по предмету за счёт параллельного освещения изучаемого материала с точки зрения других наук |
| Cходства: расширение кругозора учащегося и его эрудиции.  Отличия: перечисленные типы уроков являются звеньями одной цепочки, усложняющейся по схеме: "межпредметный урок-интегрированный урок- метапредметный урок" | | | |
| 2. | формирование метапредметных  и  универсальных учебных действий с учетом реальных потребностей и интересов в общении и познании. | создание целостной картины восприятия проблемы урока за счет систематизации знаний. | решение проблемы урока с позиций различных наук |
| Cходства: развитие личности обучаемого.  Отличия:  *Метапредметный урок* - применение метапредметных и универсальных учебных действий в связи с жизненными потребностями.  *Интегрированный урок* - систематизация знаний, умений и навыков.  *Урок с межпредметными связями* - получение знаний об учебном объекте с точки зрения различных наук. | | | |
| 3. | Метапредметный урок предполагает интеграцию не только на уровне содержания, но и на уровне организации способностей к определенным типам деятельности, направленнымнадобывание знания самостоятельным путем. Результатом такого процесса является овладение определенной способностью, применимой в разных областях знания и жизнедеятельности | Интегрированный урок позволяет конкретизировать общеучебные  знания, умения и навыки и применять их на практике. Это урок, для достижения целей которого отобрано содержание, базирующееся на межпредметном материале. | Принцип межпредметности обеспечивает системность в организации учебно-воспитательного процесса в предметной системе обучения, взаимодействие разных видов дидактических связей между учебными темами, курсами, предметами, их циклами. |
| Cходства:  предоставить каждому учащемуся широкие возможности для выбора системы ценностей, научить его ориентироваться в мире идей, образов, развивать его мышление и эмоциональное восприятие действительности, помочь ему выработать целостный взгляд на мир.   Отличия:  выявление метапредметной содержательной и деятельностной доминанты интегративного обучения на учебных предметах образовательной области  основано на представлении о поисковых моделях обучения, в которых процесс учебного поиска становится определяющим для построения обучения . | | | |
| 4. | Применение полученных знаний и умений на других уроках. | Обогащение жизненного опыта | Параллельное изучение темы на двух предметных уроках. |
| Cходства:  использование проблемно-поискового метода, активизация позновательной деятельности, эмоциональная насыщенность.  Отличия:  ученик учится сам и учит других.  Умение добывать информацию из различных источников.  Учитель не источник информации, а навигатор деятельности. | | | |
| 5. | Развитие мышления учащегося и профессионализма учителя.  Задать новые возможности работы с мировоззрением детей, с их самоопределением, с обретением смысла жизни. | Рассмотрение (изучение) учебного материала со стороны двух или более предметных областей.  Развитие потенциала учащегося | Поиск ключевых компетенций, смежных для наскольких дисциплин и их развитие |
| Cходства:  позволяет объяснить или закрепить материал с опорой на знания по другому предмету.  на интегрированном уроке обязательно присутствие стольких учителей-предметников, сколько заявлено в теме урока.  Отличия:  на интегрированном уроке обязательно присутствие стольких учителей-предметников, сколько заявлено в теме урока | | | |
| 6. | Формирование мыслящего человека, как учителя, так и ученика. | Понимание взаимосвязи и неразрывности знаний различных областей науки. | Привлечение знаний по смежным дисциплинам для лучшего усвоения материала данной области. |
| Cходства:  активизируется мыслительная деятельность, поисковая активность детей.  Отличия:  на метапредметном уроке должны формироваться универсальные действия, необходимые для процесса познания в принципе. | | | |

Математика позволяет обеспечить формирование как предметных, так и общеучебных (метапредметных) умений школьников, которые в дальнейшем позволят им применять полученные знания и умения для решения собственных жизненных задач.

оценки и контроля знаний учащихся с применением технологии сотрудничества.

Такие метапредметные компетентности, как умение организовывать учебное сотрудничество и совместную деятельность с учителем и сверстниками: определять цели, распределять функции и роли участников, умение находить в различных источниках информацию, необходимую для решения математических проблем, умение выдвигать гипотезы при решении учебных задач и понимать необходимость их проверки, успешно формируются при выполнении учебных проектов и исследовательских работ.

Достижение желаемых метапредметных результатов происходит как на уроках, так и во внеурочной деятельности.

Одной из форм организации внеурочной деятельности является метод проектов.

*Проект -*план, замысел, в результате которого автор должен получить что-то новое: продукт, отношение, программу, книгу, фильм, модель, сценарий и т.д.

Творческие проекты позволяют выявить и развить творческие возможности и способности учащихся, научить решать новые, нетиповые задачи, выявить деловые качества.

Профессиональное самоопределение. Именно при выполнении творческого проекта учащиеся задумываются над вопросами: на что я способен, где применить свои знания?

При выборе темы проекта учитываются индивидуальные способности учащихся: сильным - сложное, слабым - по их реальным возможностям.

Обучение проектным методом развивает социальный аспект личности учащегося за счет включения его в различные виды деятельности в реальных социальных и производственных отношениях, прививает учащимся жизненно необходимые знания и умения.

Перечисленные достоинства проектов и будут способствовать овладением определенными способностями, которые можно применять в разных областях жизнедеятельности.

Метапредметный подход позволяет обеспечить переход от существующей практики дробления знаний на предметы к целостному образному восприятию мира и помочь ребёнку овладеть такими способами деятельности, которые будут применимы им как в рамках образовательного процесса, так и при решении проблем в реальных жизненных ситуациях. Метапредметность как принцип интеграции содержания образования, как способ формирования теоретического мышления и универсальных способов деятельности позволяет обеспечить формирование целостной картины мира в сознании ребёнка. При таком подходе у учащихся формируется подход к изучаемому предмету как к системе знаний о мире, выраженном в числах и фигурах (математика), в веществах (химия), телах и полях (физика), художественных образах (литература, музыка, изобразительное искусство).

Таким образом, метапредметный подход обеспечивает целостность общекультурного, личностного и познавательного развития и саморазвития ребенка, преемственность всех ступеней образовательного процесса.

Рассмотрим реализацию вышеуказанной системы на примере историко-математического проекта «Эта многоликая теорема Пифагора». В ходе выполнения этого проекта сделана попытка обстоятельно представить теорему Пифагора эволюционно, в виде источника открытий, а также плодотворных математических идей и обобщений.

***Основная цель проекта***

Выяснить, почему так знаменита теорема Пифагора и её автор.

*Методические задачи:*

1.Научиться работать в команде

2.Научиться обрабатывать и обобщать полученную информацию

3.Научиться быстро и эффективно работать в сети Интернет,научиться создавать законченные информационные продукты.

*Дидактические цели проекта:*

1.С помощью дополнительной литературы, основанной на исторических фактах, познакомится с открытиями и жизнью Пифагора и его последователей с точки зрения истории развития математики и других наук;

2.Изучить различные способы существующих доказательств теоремы Пифагора;

3.Рассмотреть теорему Пифагора, как источник замечательных математических открытий;

4.Определить значение теоремы Пифагора для развития науки и использовании теоремы в различных областях;

5.Изучение возможностей программ Power Point, Publisher и компьютерно − множительной техники.

***План проекта***

*I. Подготовительный - «Мозговой штурм».*

Подготовительный этап: Представление проблемной ситуации с помощью мультимедийных средств. Распределение по группам. Выбор темы исследования учащимися. Выбор творческого названия проекта. Основной этап: Выбор творческого названия проекта. Разработка целей и задач. Обсуждение с учащимися возможных источников информации, критериев оценки результата исследования. Обсуждение предстоящих исследований Заключительный этап: Обсуждение индивидуальных планов работы учащихся. Обсуждение необходимого оборудования.

*II. Основной - «Консультация в группах».*

Подготовительный этап: Сбор, анализ и систематизация необходимой информации. Советы педагога по усовершенствованию работы. Консультации по сбору и обработки материала. Основной этап: Разрешение проблем, возникших в ходе самостоятельной работы. Выдвижение и проверка гипотез. Оценка промежуточных результатов. Мониторинг совместной деятельности. Заключительный этап: Оформление макета или модели проекта.

*III.Заключительный - «Конференция».*

Подготовительный этап. Подготовка оборудования к показу работ. Подготовка сценария проведения дискуссии. Подготовка устной презентации и защита содержания проекта. Основной этап: Демонстрация творческих разработок учащихся по группам. Защита содержания проекта. Обсуждение, оценка актуальности. Заключительный этап: Оценка результатов деятельности учащимися, одноклассниками, учителем. рефлексия: выдвижение, прогнозирование новых проблем, вытекающих из полученных результатов.

*Возможность развития проекта*

Учащиеся многое узнают о теореме, способах доказательства, о самом Пифагоре. Далее эта тема может получить свое развитие в решении задач. Не секрет, что многие дети считают решение задач делом скучным. С помощью проектного метода легко доказать, что это не так. В качестве дальнейшего развития можно выполнить проект по созданию сборника задач и тестов по теме.

***Ход выполнения проекта***

*Основополагающий вопрос:*

Может ли одна теорема существовать вечно?

Вопросы учебной темы (проблемные):

Человек или легенда?

Как может число править миром?

Почему Кеплер сравнивал теорему Пифагора с мерой золота?

Как теорема Пифагора находит свое применение?

*Самостоятельные исследования учащихся:*

1.Человек или легенда?

2.Как число может править миром?

3.Почему теорема Пифагора так знаменита?

4.Как теорема Пифагора находит свое применение?

*I. Организационно – подготовительный*

18.11.2008-22.11.2008Обсуждение темы проекта, его целей и задач; разработка плана реализации идеи; распределение тем исследований между учащимися Представление проблемной ситуации с помощью мультимедийных средств; формирование мотивации участников, создание инициативной группы учащихся, консультирование по выбору тематики и жанра проекта; помощь в подборке необходимых материалов, определение лишь общего направления и главных ориентиров поиска; определение критериев оценки деятельности учащихся на всех этапах

*II.Поисковый*

23.11.2008-7.12.2008 Сбор, анализ и систематизация необходимой информации; обсуждение ее в микрогруппах; выдвижение и проверка гипотез; оформление макета или модели проекта; самоконтроль Регулярное консультирование по содержанию проекта, помощь в систематизации и обобщении материалов, индивидуальные и групповые консультации по правилам оформления проекта, стимулирование умственной активности учащихся, отслеживание деятельности каждого участника, оценка промежуточных результатов, мониторинг совместной деятельности

*III. Итоговый*

8.12.2008-18.12.2008Оформление пакета документов по проекту и информационных стендов, схем, диаграмм; подготовка устной презентации и защита содержания проекта; рефлексия: выдвижение, прогнозирование новых проблем, вытекающих из полученных результатов Помощь в разработке отчёта о работе, подготовка выступающих к устной защите, отработка умения отвечать на вопросы оппонентов и слушателей, выступление в качестве эксперта на защите проекта, участие в анализе проделанной работы, оценка вклада каждого из исполнителей

***Возможности для учеников***

Работа в проекте способствует формированию навыков 21 века. Повышается мотивация учащихся в учебе. Самостоятельный выбор содержания и способов деятельности способствует развитию эмоциональной сферы личности, способностей, склонностей, интересов школьников. У учащихся формируется ответственность за работу группы. Учащиеся работают в группе. Такая форма позволяет распределить выполнение проекта по силам каждого учащегося. Педагог на первом этапе отслеживает распределение учащихся по группам.

***Одаренные ученики***

Темы работ в каждой группе позволяют учащимся провести исследование достаточно глубоко, проявив навыки критического и системного мышления. Выполненные работы могут быть представлены на школьной научно-практической конференции.

***Анотация проекта***

В рамках данного историко-математического проекта сделана попытка обстоятельно представить теорему Пифагора эволюционно, в виде источника открытий, а также плодотворных математических идей и обобщений.

***Дидактические материалы***

***Гипотеза:***

***Теорема Пифагора – одна из главных теорем геометрии.***

***Цель работы ученика:***

***Познакомиться с различными доказательствами теоремы Пифагора.***

***Понять, что геометрия – это просто.***

***Увидеть красоту в «трудном» школьном предмете.***

**Программа изучения этой темы:**

История теоремы

Формулировки теоремы

Доказательства:

а) простейшее;

б) алгебраическое;

в) другие;

***История теоремы***

Исторический обзор начнем с *древнего Китая*. Здесь особое внимание привлекает математическая книга Чу-пей. В этом сочинении так говорится о пифагоровом треугольнике со сторонами 3, 4 и 5: *"Если прямой угол разложить на составные части, то линия, соединяющая концы его сторон, будет 5, когда основание есть 3, а высота 4".* В этой же книге предложен рисунок, который совпадает с одним из чертежей индусской геометрии Басхары. *Кантор* (крупнейший немецкий историк математики) считает, что равенство *32 + 42 = 52* было известно уже *египтянам* еще около 2300 г. до н. э., во времена царя *Аменемхета I* (согласно папирусу 6619 Берлинского музея).

По мнению Кантора "натягиватели веревок", строили прямые углы при помощи прямоугольных треугольников со сторонами 3, 4 и 5.

Несколько больше известно о теореме Пифагора у *вавилонян*. В одном тексте, относимом ко времени *Хаммураби*, т. е. к 2000 г. до н. э., приводится приближенное вычисление гипотенузы прямоугольного треугольника. Отсюда можно сделать вывод, что в Двуречье умели производить вычисления с прямоугольными треугольниками, по крайней мере в некоторых случаях. Основываясь, с одной стороны, на сегодняшнем уровне знаний о египетской и вавилонской математике, а с другой-на критическом изучении греческих источников, Ван-дер-Варден (голландский математик) сделал следующий вывод: *"Заслугой первых греческих математиков, таких как Фалес, Пифагор и пифагорейцы, является не открытие математики, но ее систематизация и обснование. В их руках вычислительные рецепты, основанные на смутных представлениях, превратились в точную науку"*.

Геометрия у *индусов*, как и у египтян и вавилонян, была тесно связана с культом. Весьма вероятно, что теорема о квадрате гипотенузы была известна в Индии уже около 18 века до н. э. В настоящее время известно, что эта теорема не была открыта Пифагором. Однако одни полагают, что Пифагор первым дал ее полноценное доказательство, а другие отказывают ему и в этой заслуге.

Как мы видим, история математики почти не сохранила достоверных данных о жизни Пифагора и его математической деятельности. Зато легенда сообщает даже ближайшие обстоятельства, сопровождавшие открытие теоремы. Рассказывают, что в честь этого открытия Пифагор принес в жертву 100 быков.

***Формулировки теоремы.***

Приведем различные формулировки теоремы Пифагора в переводе с греческого, латинского и немецкого языков.

У **Евклида** эта теорема гласит (дословный перевод):

"В прямоугольном треугольнике квадрат стороны, натянутой над прямым углом, равен квадратам на сторонах, заключающих прямой угол".

Латинский перевод арабского текста **Аннаирици**(около 900 г. до н. э.), сделанный **Герхардом Клемонским** (начало 12 в.), в переводе на русский гласит:

"Во всяком прямоугольном треугольнике квадрат, образованный на стороне, натянутой над прямым углом, равен сумме двух квадратов, образованных на двух сторонах, заключающих прямой угол".

В **Geometria Culmonensis** (около 1400 г.) в переводе теорема читается так:

*"Итак, площадь квадрата, измеренного по длинной стороне, столь же велика, как у двух квадратов, которые измерены по двум сторонам его, примыкающим к прямому углу"*.

В первом русском переводе евклидовых **"Начал"**, сделанном **Ф. И. Петрушевским**, теорема Пифагора изложена так:

*"В прямоугольных треугольниках квадрат из стороны, противолежащей прямому углу, равен сумме квадратов из сторон, содержащих прямой угол"*.

***Если дан нам треугольник***

***И притом с прямым углом,***

***То квадрат гипотенузы***

***Мы всегда легко найдем:***

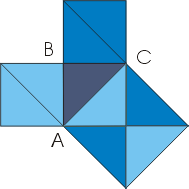
***Катеты в квадрат возводим,***

***Сумму степеней находим —***

***И таким простым путем***

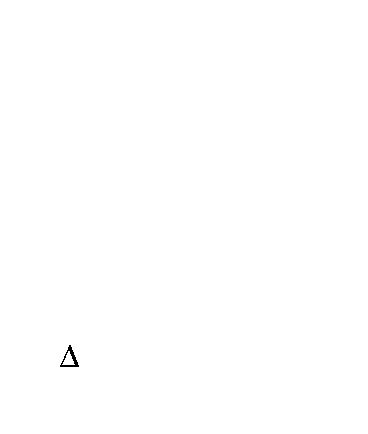
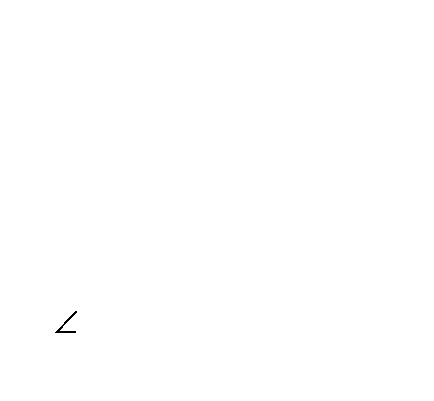
***К результату мы придем.***

***Доказательства.***

Доказательство теоремы Пифагора учащиеся средних веков считали очень трудным и называли его Dons asinorum- ослиный мост, или elefuga- бегство “убогих”, так как некоторые “убогие” ученики, не имевшие серьезной математической подготовки, бежали от геометрии. Слабые ученики, заучившие теоремы наизусть, без понимания, и прозваны по этому “ослами”, были не в состоянии преодолеть теорему Пифагора, служившую для них вроде непреодолимого моста.

*Простейшее доказательство* теоремы получается в простейшем случае равнобедренного прямоугольного треугольника. Вероятно, с него и начиналась теорема. В самом деле, достаточно просто посмотреть на мозаику равнобедренных прямоугольных треуголь­ников (рис. 1), чтобы убедиться в справедливости теоремы. Например, для ∧ABC: квадрат, построенный на гипотенузе *АС,*содержит 4 исходных треугольника, а квадраты, построенные на катетах,— по два. Теорема доказана.

**Алгебраическое доказательство**

Дано: *ABC*-прямоугольный треугольник, С = 90º.

Доказать: *AB2=AC2+BC2*

                                          Доказательство:

1) Проведем высоту ***CD*** из вершины прямого угла ***С***.

2) По определению косинуса угла ***соsА = AD/AC=AC/AB***, отсюда следует

***AB\*AD=AC2.***

3) Аналогично ***соsВ = BD/BC=BC/AB***, значит

***AB\*BD=BC2.***

4) Сложив полученные равенства почленно, получим:

***AC2+BC2=АВ\*(AD + DB)***

***AB2=AC2+BC2.***

**Доказательство Евклида**

Дано: ***ABC***-прямоугольный треугольник

Доказать: SABDE=SACFG+SBCHI

                                          Доказательство:

Пусть *ABDE*-квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника *ABC*, а *ACFG* и *BCHI*-квадраты, построенные на его катетах. Опустим из вершины *C* прямого угла перпендикуляр *CP* на гипотенузу и продолжим его до пересечения со стороной *DE* квадрата *ABDE* в точке *Q*; соединим точки *C* и *E*, *B* и *G*. Очевидно, что углы *CAE=GAB(=A+90°)*; отсюда следует, что треугольники *ACE* и *AGB*(закрашенные на рисунке) равны между собой (по двум сторонам и углу, заключённому между ними). Сравним далее треугольник *ACE* и прямоугольник *PQEA*; они имеют общее основание *AE* и высоту *AP*, опущенную на это основание, следовательно

*SPQEA=2SACE*

Точно так же квадрат *FCAG* и треугольник *BAG* имеют общее основание *GA* и высоту *AC*; значит,

*SFCAG=2SGAB*

Отсюда и из равенства треугольников *ACE* и *GBA* вытекает равновеликость прямоугольника *QPBD* и квадрата *CFGA*; аналогично доказывается и равновеликость прямоугольника*QPAE* и квадрата *CHIB*. А отсюда, следует, что квадрат *ABDE* равновелик сумме квадратов *ACFG* и *BCHI*, т.е. теорема Пифагора.

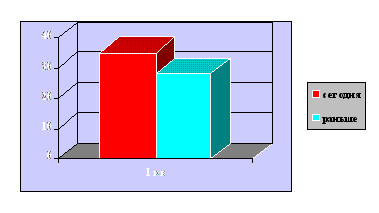
|  |  |
| --- | --- |
| **Доказательство Хоукинсa.**  Приведем еще одно доказательство, которое имеет вычислительный характер, однако сильно отличается от всех предыдущих. Оно опубликовано англичанином Хоукинсом в 1909 году; было ли оно известно до этого - трудно сказать.  Прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C повернем на 90° так, чтобы он занял положение A'CB'. Продолжим гипотенузу A'В' за точку A' до пересечения с линией АВ в точке D. Отрезок В'D будет высотой треугольника В'АВ. Рассмотрим теперь заштрихованный четырехугольник A'АВ'В. Его можно разложить на два равнобедренных треугольника САA' и СВВ' (или на два треугольника A'В'А и A'В'В).  SCAA'=b²/2  SCBB'=a²/2  SA'AB'B=(a²+b²)/2  Треугольники A'В'А и A'В'В имеют общее основание с и высоты DA и DB, поэтому:  SA'AB'B=c\*DA/2+ c\*DB/2=c(DA+DB)/2=c²/2  Сравнивая два полученных выражения для площади, получим:  a²+b²=c²  Теорема доказана. | https://docs.google.com/document/pubimage?id=1oShLUPM3OHQQM9RxFTQs5z5mOnjxSvU3Zu975YqALSU&image_id=1mZHsG-bg_Zlhh6NzcSnI2nK6eCsdUVo |
| **Доказательство Вальдхейма.**  Это доказательство также имеет вычислительный характер. Можно использовать рисунки для доказательства основанного на вычислении площадей двумя способами.  Для того чтобы доказать теорему пользуясь первым рисунком достаточно только выразить площадь трапеции двумя путями.  Sтрапеции=(a+b)²/2  Sтрапеции=a²b²+c²/2  При равнивая правые части получим:  a²+b²=c²  Теорема доказана. | https://docs.google.com/document/pubimage?id=1oShLUPM3OHQQM9RxFTQs5z5mOnjxSvU3Zu975YqALSU&image_id=1NRvMv6L6ffwh1yaoK6dcJhSepzfnr1I  https://docs.google.com/document/pubimage?id=1oShLUPM3OHQQM9RxFTQs5z5mOnjxSvU3Zu975YqALSU&image_id=1iDyEa2U7N8lgcl_2Lto3jH6hUQ2vjsg |
| **Доказательство основанное на теории подобия.**  В прямоугольном треугольника АВС проведем из вершины прямого угла высоту CD; тогда треугольник разобьется на два треугольника, также являющихся прямоугольными. Полученные треугольники будут подобны друг другу и исходному треугольнику. Это легко доказать, пользуясь первым признаком подобия (по двум углам). В самом деле, сразу видно что, кроме прямого угла, треугольники АВС и ACD имеют общий угол a, треугольники CBD и АВС - общий угол b. То, что малые треугольники также подобны друг другу, следует из того, что каждый из них подобен большому треугольнику. Впрочем, это можно установить и непосредственно. | https://docs.google.com/document/pubimage?id=1oShLUPM3OHQQM9RxFTQs5z5mOnjxSvU3Zu975YqALSU&image_id=1UcVNndmxwydcBGnyQzPumQofx4O4ZLI |
| Доказательство индийского математика **Басхары** изображено на рисунке. В пояснение к нему он написал только одну строчку: "Смотри!". Ученые считают, что он выражал площадь квадрата ,построенного на гипотенузе, как сумму площадей треугольников (4ab/2) и площадь квадрата (a-b)². Следовательно:  c²=4ab/2+(a-b)²  c=2ab+a²-2ab+b²  c²=a²+b²  Теорема доказана. | https://docs.google.com/document/pubimage?id=1oShLUPM3OHQQM9RxFTQs5z5mOnjxSvU3Zu975YqALSU&image_id=1l2J_VmFXX51X2Wnxt-qNADQoVIZS5C8 |
| **Луночки Гиппократа**  Существует одно интересное приложение обобщения теоремы Пифагора, которое встречается во многих учебниках геометрии под названием теоремы о гиппократовых луночках.  Гhttps://docs.google.com/document/pubimage?id=1oShLUPM3OHQQM9RxFTQs5z5mOnjxSvU3Zu975YqALSU&image_id=1p-kMoblH05Rv1vpjQscW3U-t52uTdtAиппократ Хиосский (вторая половина пятого века до н. э., Афины) занимался квадратурой луночек. Он называл луночкой часть плоскости, ограниченную двумя дугами окружностей. Наше предложение в том виде, как оно будет здесь сформулировано, не встречается у самого Гипократа, который нашел квадратуру только для некоторых луночек. Во всей общности теорему доказал араб Ибн Альхаитам:  *"Если на гипотенузе прямоугольного треугольника как на диаметре описать полуокружность, лежащую с той же стороны гипотенузы, что и сам треугольник, то она пройдет через вершину прямого угла."* Эту теорему греки приписывали Фалесу Милетскому, но в действительности ее знали еще древние вавилоняне.  Для того, чтобы доказать теорему о гиппократовых луночках, докажем следующее предложение: Если на катетах и на гипотенузе прямоугольного треугольника построены какие угодно подобные между собой фигуры Fa, Fb, Fc, так, что катеты и гипотенуза являются сходственными отрезками этих фигур, то имеет место равенство: Fa+Fb=Fc.  Для доказательства воспользуемся следующей теоремой из теории подобия: ***площади подобных многоугольников относятся как квадраты сходственных сторон***.  Если через Fa, Fb, Fc обозначить площади подобных многоугольников, построенных на катетах a, b и гипотенузе с прямоугольного треугольника, то согласно вспомогательной теореме можно написать:  Fa/Fb/Fc=a²/b²/c².  Эта пропорция означает,что можно найти число k (коэффицент пропорциональности) такое, что  Fa=ka² Fb=kb² Fc=kc².  .  Умножив обе части равенства на k и принимая во внимание предыдущие равенства, получим:  Fa+Fb=Fc.  Если равенство Fa+Fb=Fc имеет место хотя бы для одной тройки подобных между собой многоугольников, построенных на катетах и на гипотенузе прямоугольного треугольника АВС так, что АС, ВС и АВ есть сходственные отрезки этих многоугольников, то  ka²+kb²=kc²  (где k имеет какое-то определенное значение, зависящее от выбора многоугольников, - нам совершенно не важно, какое именно). Но отсюда вытекает, что  а²+b²=с²,  а это влечет за собой тот факт,что равенство Fa+Fb=Fc выполняется для любых построенных на сторонах прямоугольного треугольника подобных многоугольников, в частности, и для квадратов.  **Векторное док-во**  Пусть АВС - прямоугольный треугольник с прямым углом при вершине С, построенный на векторах. Тогда справедливо векторное равенство: b+c=a  откуда имеем  c = a - b  возводя обе части в квадрат, получим  c²=a²+b²-2ab  Так как a перпендикулярно b, то ab=0, откуда  c²=a²+b² или c²=a²+b²  Нами снова доказана теорема Пифагора.  Если треугольник АВС - произвольный, то та же формула дает т. н. **теорему косинусов**, обобщающую теорему Пифагора. | https://docs.google.com/document/pubimage?id=1oShLUPM3OHQQM9RxFTQs5z5mOnjxSvU3Zu975YqALSU&image_id=1ir8p-enmEtVnlr8itdX9Oyc9zzBaF-c |

**Доказательства методом разложения**

Существует целый ряд доказательств теоремы Пифагора, в которых квадраты, построенные на катетах и на гипотенузе, разрезаются так, что каждой части квадрата, построенного на гипотенузе, соответствует часть одного из квадратов, построенных на катетах. Во всех этих случаях для понимания доказательства достаточно одного взгляда на чертеж; рассуждение здесь может быть ограничено единственным словом: "Смотри!", как это делалось в сочинениях древних индусских математиков. Следует, однако, заметить, что на самом деле доказательство нельзя считать полным, пока мы не доказали равенства всех соответствующих друг другу частей. Это почти всегда довольно не трудно сделать, однако может (особенно при большом количестве частей) потребовать довольно продолжительной работы.

|  |  |
| --- | --- |
| **Доказательство Эпштейна**  Начнем с доказательства **Эпштейна**(рис. 1); его преимуществом является то, что здесь в качестве составных частей разложения фигурируют исключительно треугольники. Чтобы разобраться в чертеже, заметим, что прямая CD проведена перпендикулярно прямой EF.  Разложение на треугольники можно сделать и более наглядным, чем на рисунке. | https://docs.google.com/document/pubimage?id=1oShLUPM3OHQQM9RxFTQs5z5mOnjxSvU3Zu975YqALSU&image_id=19C4N7HMR-wkOJqSl1ygyClY4e0PTfaA |
| **Доказательство Нильсена.**  На рисунке вспомогательные линии изменены по предложению **Нильсена**. | https://docs.google.com/document/pubimage?id=1oShLUPM3OHQQM9RxFTQs5z5mOnjxSvU3Zu975YqALSU&image_id=1nwntESgFKhXt_jPQI9lEG9dyXyt_aAk |
| **Доказательство Бетхера .**  На рисунке дано весьма наглядное разложение **Бетхера**. | https://docs.google.com/document/pubimage?id=1oShLUPM3OHQQM9RxFTQs5z5mOnjxSvU3Zu975YqALSU&image_id=1WEHfNHqRdaJ7FHJ0wdg1GtIOYXy8qwo |
| **Доказательство Перигаля.**  В учебниках нередко встречается разложение указанное на рисунке (так называемое "колесо с лопастями"; это доказательство нашел **Перигаль**). Через центр O квадрата, построенного на большем катете, проводим прямые, параллельную и перпендикулярную гипотенузе. Соответствие частей фигуры хорошо видно из чертежа. | https://docs.google.com/document/pubimage?id=1oShLUPM3OHQQM9RxFTQs5z5mOnjxSvU3Zu975YqALSU&image_id=1F7pgYg1rChP-3Jfn3fRml0xLR9s3_Rg |
| **Доказательство Гутхейля.**  Изображенное на рисунке разложение принадлежит Гутхейлю; для него характерно наглядное расположение отдельных частей, что позволяет сразу увидеть, какие упрощения повлечет за собой случай равнобедренного прямоугольного треугольника. | https://docs.google.com/document/pubimage?id=1oShLUPM3OHQQM9RxFTQs5z5mOnjxSvU3Zu975YqALSU&image_id=1ft66iFZfb7IeiG2sFy91zi0kly-b2a0 |
| **Доказательство 9 века н.э.**  Ранее были представлены только такие доказательства, в которых квадрат, построенный на гипотенузе, с одной стороны, и квадраты,построенные на катетах, с другой, складывались из равных частей. Такие доказательства называются доказательствами при помощи сложения ("аддитивными доказательствами") или, чаще, доказательствами методом разложения. До сих пор мы исходили из обычного расположения квадратов, построенных на соответствующих сторонах треугольника, т. е. вне треугольника. Однако во многих случаях более выгодно другое расположение квадратов.  На рисунке квадраты, построенные на катетах, размещены ступенями один рядом с другим. Эту фигуру, которая встречается в доказательствах, датируемых не позднее, чем 9 столетием н. э., индусы называли**"стулом невесты"**. Способ построения квадрата со стороной, равной гипотенузе, ясен из чертежа. Общая часть двух квадратов, построенных на катетах, и квадрата, построенного на гипотенузе, - неправильный заштрихованный пятиугольник 5. Присоединив к нему треугольники 1 и 2, получим оба квадрата, построенные на катетах; если же заменить треугольники 1 и 2 равными им треугольниками 3 и 4, то получим квадрат, построенный на гипотенузе. На рисунках ниже изображены два различных расположения близких к тому, которое дается на первом рисунке. | https://docs.google.com/document/pubimage?id=1oShLUPM3OHQQM9RxFTQs5z5mOnjxSvU3Zu975YqALSU&image_id=1wYFVPxqIabb1j-KrQXR4qe_yBN0n2PU  https://docs.google.com/document/pubimage?id=1oShLUPM3OHQQM9RxFTQs5z5mOnjxSvU3Zu975YqALSU&image_id=1lkJ1wQLdum_YB0WQsMtxHKAzourVZrE  https://docs.google.com/document/pubimage?id=1oShLUPM3OHQQM9RxFTQs5z5mOnjxSvU3Zu975YqALSU&image_id=1gkZlIa_670E7eqWPrRzZn2bXGVAgS34 |

На этой диаграмме показано на сколько больше доказательств стало в наше время



**Карикатуры.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| https://docs.google.com/document/pubimage?id=1oShLUPM3OHQQM9RxFTQs5z5mOnjxSvU3Zu975YqALSU&image_id=1bxsWlBTohbm5okQpmHKQSJk7appafWU | https://docs.google.com/document/pubimage?id=1oShLUPM3OHQQM9RxFTQs5z5mOnjxSvU3Zu975YqALSU&image_id=1eiILr8t_v4Dciv3zTfz_UE69fFZog90 | https://docs.google.com/document/pubimage?id=1oShLUPM3OHQQM9RxFTQs5z5mOnjxSvU3Zu975YqALSU&image_id=17vTWm1KlwtrKzjQxJUoU52mtTpoAMVc |

Из-за чертежей, сопровождающих теорему Пифагора, учащиеся называли ее также "ветряной мельницей", составляли стихи вроде "Пифагоровы штаны на все стороны равны", рисовали карикатуры.

Теорема Пифагора замечательна и тем, что сама по себе она вовсе не очевидна. Например, свойства равнобедренного треугольника можно видеть непосредственно на чертеже. Но сколько ни смотри на прямоугольный треугольник, никак не увидишь, что между его сторонами есть простое соотношение: *c2=a2+b2*.

**Вывод.** **Теорема Пифагора - одна из главных и, можно сказать, самая главная теорема геометрии. Значение ее состоит в том, что из нее или с ее помощью можно вывести большинство теорем геометрии.**

**Рассмотрев различные типы доказательств теоремы Пифагора, я убедилась в её совершенстве, увидев её красоту, простоту и значимость.**

**Литература.**

И.Ф. Шарыгин. Геометрия 10-11 класс, М: «Просвещение», 2000 г.

Г.И. Глейзер. История математики в школе, М: «Просвещение», 1982 г.

«Геометрия: Учеб. для 7 – 9 кл. общеобразоват. учреждений \ Атанасян Л.С., В. Ф.Бутузов и др. – 9-е изд.- М.: Просвещение, 1999

«Геометрия: Учеб. для 7 – 9 кл. общеобразоват. учреждений \ Погорелов А. В. - М.: Просвещение, 2000