Поздняк Н.И. СПб ГБОУ 517

Методика определения скорости молекул газа при пониженном давлении

Для многих физических задач, используемых в различных технологиях, важно знать какой вариант средней скорости следует выбрать в том или ином случае. Поэтому необходимо рассмотреть соотношений между различными типами скоростей и их значение для некоторых газов. Газ состоит из огромного числа молекул, следовательно, поведение молекул подчиняется статистическим законам и имеет смысл говорить лишь о средних скоростях молекул. Различают скорости: среднеквадратичную, среднеарифметическую, наиболее вероятную и среднеотносительную. Если некоторая физическая величина напрямую зависит от квадрата скорости, например, кинетическая энергия частицы, то используется среднеквадратичная скорость $\langle V_{кв} \rangle$. Так как газ при пониженном давлении можно считать идеальным, то среднеквадратичная скорость молекул может быть вычислена, исходя из основных уравнений мкт:

$$P=nkT \quad и \quad P=1/3\, nm_o\langle V_{кв}^2 \rangle, тогда:$$

$$\langle V_{кв}\rangle = \sqrt{3кT/m_0} = \sqrt{3RT/M}$$

где m_o – масса молекулы, кг

M –молярная масса, кг/моль.

n - концентрация, 1/м3 ,

k - постоянная Больцмана, Дж/К

В задачах, связанных с применением закона распределения частиц по скоростям используют наиболее вероятную скорость – $V_в$.

Статистический закон Максвелла распределения молекул идеального газа по скоростям имеет вид:

$dN = N_0\, f(V)\, dV$, где

N_0 – общее число молекул,

dN – число молекул со скоростями в интервале от V до $V + dV$, а выражение:

$f\{V\}=4\pi(m_0/2\pi kT)^{3/2}\, V^{3/2}\mathbf{e}^{-mv\,2/2kT}$, где

$f(V)$ –функция распределения молекул по скоростям, удовлетворяющая

условию нормировки:

$$\int_0^{\infty} f(V)dV = 1$$

Максимальному значению функции распределения соответствует наиболее вероятные скорости, которые можно найти по производной функции распределения, приравняв ее к нулю

$$\frac{d}{dV}(V^2\mathbf{e}^{-mv2/2kT}) = 2V(1 - m_0V^2/2kT)\,\mathbf{e}^{-mV2/2kT} = 0,$$

Тогда: $1 – m_0V^2/2kT = 0$ и $V_в = \sqrt{2kT/m} = \sqrt{2RT/M}$

Если в формуле физическая величина зависит от скорости в первой степени, например, средний импульс, среднее число сталкивающихся частиц, среднее время свободного пробега, то применяется среднеарифметическая скорость - $\langle V_a \rangle$.

Среднеарифметическую скорость можно определить из выражения:

$$\langle Va\rangle = \int_0^{\infty} VdN(V)/N = \int_0^{\infty} Vf(V)dV$$

Используя, функцию распределения и интегрируя, получим:

$$\langle Va\rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{8RT/\pi M}$$

Чтобы учесть скорости сталкивающихся частиц, приходиться, вместо среднеарифметической скорости, брать среднеотносительную скорость - <Vотн >. При взаимном столкновении перемещающихся молекул их средняя арифметическая скорость станет относительной при рассмотрении движения молекул в системе центра масс вместо лабораторной системы.

В лабораторной системе, т.е. относительно стенок сосуда, суммарный импульс молекул не равен нулю. В системе центра масс (система – С) суммарный импульс равен нулю:

$\mathbf{P}_{C} = \sum_n^2 \mathbf{P}\text{сп} = \sum_n^2 mV\text{п} - \sum_n^2 mVc = 0$, тогда $Vc = \frac{\sum_n^2 mV\text{п}}{\sum_n^2 m}$

Для двух сталкивающихся частиц скорость центра масс:

$$Vc = (m_1 V_1 + m_2 V_2)/(m_1 + m_2)$$

По правилу сложения скоростей (преобразование Галилея) скорость молекул составляет:

В лабораторной системе: $Vn = Vcn + Vc$

В системе центра масс: $Vcn = Vn + Vc$, или

$$Vc1 = V_1 - Vc = V_1 - (m_1 V_1 + m_2 V_2)/(m_1 + m_2) = m_2 (V_1 - V_2)/(m_1 + m_2)$$

$$Vc2 = V_2 - Vc = m_1 (V_2 - V_1)/(m_1 + m_2)$$

Импульс в системе центра масс: $\mathbf{P}cn = m_n Vcn$, тогда:

$$\mathbf{P}c1 = m_1 m_2 (V_1 - V_2)/(m_1 - m_2) = \text{Мприв} (V_1 - V_2) \text{ и}$$

$$\mathbf{P}c2 = m_1 m_2 (V_2 - V_1)/(m_1 + m_2) = - \text{Мприв} (V_1 - V_2).$$

Импульсы двух молекул в системе центра масс равны по модулю и противоположны по направлению, т.е. сумма импульсов равна нулю.

В системе центра масс приведенная масса равна: $\text{Мпр} = m_1 m_2 /\{ m_1 + m_2)$, это значит, что вместо двух сталкивающихся молекул можно рассматривать всего одну молекулу, но с приведенной массой.

В случае равенства масс двух молекул получим: Мпр = m/2 и функция распределения для относительной скорости имеет вид:

$$f\{V_{отн}\} = 4\pi V^2_{отн} \{m/4\pi kT\}^{3/2} e^{-mV2/4kT}$$ и тогда средняя

относительная скорость молекулы будет:

$$<V_{отн}> = \int_n^2 V_{отн} f\{V_{отн}\}\, dV_{отн} = \sqrt{16kT/\pi m} = \sqrt{2} < V_a>$$

Соотношение: $<V_{отн}> = \sqrt{2}\ <V_a>$ можно получить проще:

$$|V_{отн}|^2 = |V2 - V1|^2 = V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2 \cos\alpha$$, т.к. среднее значение

суммы равно среднему значению слагаемых, то:

$$<V_{отн}^2> = <V_1^2> + <V_2^2> - <2V_1V_2\cos\alpha>$$

Угол - α равновероятно принимает значения от 0 до 180 градусов, следовательно, значение слагаемого - $<2V_1V_2\cos\alpha>$ можно принять за нуль. Предполагая, что молекулы одинаковы и $<V_1^2> = <V_2^2>$, имеем:

$<V_{отн}^2> = 2<V_{кв}^2>$ или $<V_{отн}> = \sqrt{2}\ <V_{кв}>$, тогда, т.к. $<V_{кв}>$ пропорциональна $<V_a>$, получим:

$$<V_{отн}> = \sqrt{2}<V_a>$$

Отношения всех полученных скоростей между собой для одинаковых

условий и одних и тех же газов будут:

$V_в : <V_a> : <V_{кв}> : <V_{отн}>$ = 1,41 : 1,60 : 1,73 : 2,26, или по другому:

$V_в = \sqrt{3RT/M}$, $<V_a> = 1{,}13\ V_в$, $<V_{кв}> = 1{,}22\ V_в$, $<V_{отн}> = 1{,}60\ V_в$

Пусть $M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль (азот) и T = 300K, тогда:

Vв= $(2 * 8,31 * 300/28 * 10^{-3})^{1/2}$ = 422,0 м/с, <Va > = 476,9 м/с , <Vкв > = 514,8м/с, <Vотн > = 673 м/с - для азота,

Vв= 1578,9 м/с, <Va > = 1784,2 м/с , <Vкв > = 1925,4 м/с , <Vотн > = 2520 м/с - для водорода,

Vв = 394,7 м/с, <Va> = 446,0 м/с , <Vкв > = 481,4 м/с, <Vотн > = 630 м/с - для кислорода.

Н.И.Поздняк, фмф