**Областное государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение**

**«Костромской торгово-экономический колледж»**

156000, г. Кострома, ул. Долматова, д. 25а

## 

## **«Векторы в пространстве.»**

**Подготовил: студент 1 курса группа 43.02.15**

**Козонков Дмитрий Павлович**

**Проверила: Холинова Ольга Анатольевна,**

учитель математики и информатики

**Кострома, 2019**

**Векторы в пространстве**

https://mathematics.ru/courses/stereometry/design/images/definition.gif**Определение 1.**

***Вектор*** – направленный отрезок. Другими словами, вектором называется отрезок, для которого указано, какой из его концов является началом, а какой концом.

На рисунках направление вектора обозначается стрелкой от начала к концу. Если длина рассматриваемого отрезка равна нулю, то есть отрезок вырождается в точку, то эта точка тоже может рассматриваться как вектор. Такой вектор называется нулевым и имеет произвольное направление.

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/chapter9/section/paragraph1/images/0900101.jpg |
| Рисунок 9.1.1 |

На рисунке 9.1.1 изображены ненулевые векторы https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915635796-1.gif и https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915635806-2.gif и нулевой вектор https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915635806-3.gif Нулевой вектор иногда обозначается символом https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915635816-4.gif

https://mathematics.ru/courses/stereometry/design/images/definition.gif**Определение 2.**

Длиной (***модулем***) ненулевого вектора https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915635816-5.gif называется длина отрезка *AB*. Она обозначается как https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915635826-6.gif Длина нулевого вектора равна нулю: https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915635856-7.gif

https://mathematics.ru/courses/stereometry/design/images/definition.gif**Определение 3.**

Два ненулевых вектора называются ***коллинеарными***, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Поскольку нулевой вектор может иметь произвольное направление, то разумно считать его коллинеарным любому ненулевому вектору.

https://mathematics.ru/courses/stereometry/design/images/definition.gif**Определение 4.**

Если два ненулевых вектора https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915635866-8.gif и https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915635896-9.gif коллинеарны, а лучи *AB* и *CD* сонаправлены, то векторы https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915635936-10.gif и https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915635966-11.gif называются ***сонаправленными***. Этот факт обозначается так: https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915635996-12.gif Если же эти лучи не являются сонаправленными, то векторы https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915636016-13.gif и https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915636116-14.gif называются ***противонаправленными***. Этот факт обозначается так: https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915636116-15.gif

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/chapter9/section/paragraph1/images/0900102.jpg |
| Рисунок 9.1.2 |

На рисунке 9.1.2 https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915636146-16.gif https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915636156-17.gif https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915636166-18.gif https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915636176-19.gif

https://mathematics.ru/courses/stereometry/design/images/definition.gif**Определение 5.**

Два вектора называются ***равными***, если они сонаправлены и их длины равны.

На рисунке 9.1.2 https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915636196-20.gif так как https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915636206-21.gif и https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915636206-22.gif а https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915636226-23.gif так как https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915636256-24.gif

Нетрудно доказать следующее.

https://mathematics.ru/courses/stereometry/design/images/theorem.gif**Теорема 1. 1**

От любой точки пространства можно отложить вектор, равный данному, и притом только один.

Сделайте это самостоятельно.

https://mathematics.ru/courses/stereometry/design/images/definition.gif**Определение 6.**

Два вектора называются ***противоположными***, если их длины равны, и они противоположно направлены (рис. 9.1.3).

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/chapter9/section/paragraph1/images/0900103.jpg |
| Рисунок 9.1.3.  https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915636286-25.gif и https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915636316-26.gif – противоположные векторы. |

https://mathematics.ru/courses/stereometry/design/images/definition.gif**Определение 7.**

***Суммой*** двух векторов https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915636356-27.gif и https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915636366-28.gif называется новый вектор https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915636366-29.gif который обозначается https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915636376-30.gif и получается следующим образом.

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/chapter9/section/paragraph1/images/0900104.jpg |
| Рисунок 9.1.4 |

Отложим от произвольной точки *A* вектор https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915636426-31.gif, равный https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915636446-32.gif Теперь от точки *B* отложим вектор https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915636467-33.gif равный https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915636477-34.gif Вектор  и называется суммой векторов https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915636517-36.gif и https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915636517-37.gif https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915636557-38.gif Это правило сложения векторов называется ***правилом треугольника***.

Для сложения двух неколлинеарных векторов можно воспользоваться ***правилом параллелограмма***, известным из курса планиметрии (рис. 9.1.5).

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/chapter9/section/paragraph1/images/0900105.jpg |
| Рисунок 9.1.5 |

Для любых векторов https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915636557-39.gif https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915636577-40.gif и https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915636597-41.gif справедливы равенства:

* https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915636607-42.gif (переместительный закон);
* https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915636627-43.gif (сочетательный закон).

https://mathematics.ru/courses/stereometry/design/images/definition.gif**Определение 8.**

Разностью векторов https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915636657-44.gif и https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915636657-45.gif называется такой вектор https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915636677-46.gif сумма которого с вектором https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915636697-47.gif равна вектору https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915636717-48.gif Обозначается разность векторов так: https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915636727-49.gif где https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915636747-50.gif – вектор, противоположный вектору https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915636767-51.gif (рис. 9.1.6).

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/chapter9/section/paragraph1/images/0900106.jpg |
| Рисунок 9.1.6 |

https://mathematics.ru/courses/stereometry/design/images/theorem.gif**Теорема 2.2.**

Сумма нескольких векторов не зависит от того, в каком порядке они складываются.

Доказательство этого утверждения следует из закона сложения векторов.

https://mathematics.ru/courses/stereometry/design/images/definition.gif**Определение 9.**

Произведением ненулевого вектора https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915636797-52.gif на число *k* называется вектор https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915636827-53.gif длина которого равна https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915636827-54.gif причем при *k* > 0 векторы https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915636837-55.gif и https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915636847-56.gif сонаправлены, а при *k* < 0 – противонаправлены. Произведением любого числа на нулевой вектор является по определению нулевой вектор.

Из этого определения следует, что векторы https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915636867-57.gif и https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915636897-58.gif коллинеарны. Кроме того, произведение любого вектора на число 0 есть нулевой вектор.

Для любых векторов https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915636907-59.gif https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915636927-60.gif и любых чисел *k* и *l* справедливы равенства:

* https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915636967-61.gif (сочетательный закон);
* https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915636997-62.gif (первый распределительный закон);
* https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915637027-63.gif (второй распределительный закон).

https://mathematics.ru/courses/stereometry/design/images/theorem.gif**Теорема 3.3. Признак коллинеарности векторов.**

Для коллинеарности вектора https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915637057-64.gif ненулевому вектору https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915637067-65.gif необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число λ, что https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915637077-66.gif

Эта теорема доказывается аналогично, как в планиметрии.

**Следствие 1.3.1.**

Для того, чтобы точка *C* лежала на прямой *AB*, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число λ, что https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915637087-67.gif

**Следствие 1.3.2.**

Для параллельности прямых *AM* и *BN* необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число λ, что https://mathematics.ru/courses/stereometry/content/javagifs/63229915637117-68.gif