**Н.В. Токунова,**

**ВСФ ФГБОУ ВО «РГУП»,**

**г. Иркутск, Российская Федерация**

**Квадратные уравнения с параметром**

Программа школьного курса математики не позволяет в полном объеме рассмотреть задачи на решение квадратных уравнений и неравенств, содержащих параметр. В последнее время же задачи с параметрами стали неотъемлемой частью ОГЭ и ЕГЭ по математике. Решение любой из таких задач предполагает исследование. А это вызывает у учащихся определенные трудности.

**1.** **Понятие квадратного трёхчлена с параметром.**

Выпишем основные понятия, которые необходимы для исследования квадратного трёхчлена и для решения задач с его использованием.

**1.1. Квадратный трехчлен с параметром.**

*Квадратный трехчлен* – это многочлен вида ax2 + bx + c, где a ≠ 0. Например: 5x2 + 7x + 2; 2x2 - 8x + 4.

Значение переменной x, при котором квадратный трехчлен обращается в ноль, называется его корнем. Чтобы найти корни квадратного трехчлена, нужно решить соответствующее квадратное уравнение: для квадратного трёхчлена ax2 + bx + c нужно решить квадратное уравнение ax2 + bx + c = 0, где a ≠ 0.

*Квадратный трехчлен с параметром* – это квадратный трехчлен вида A(a)x2 + B(a)x + C(a), где A(a), B(a), C(a) – коэффициенты, которые зависят от параметра a; A(a) ≠ 0.

Например: (2a-1)·x2 + 4ax + 3; 7x2 + (8-a)·x - 0,3.

**1.2. Расположение корней квадратного трехчлена.**

Чтобы решить квадратное уравнение с параметром, нужно понять, при каких значениях параметра существуют корни, и найти их, выразив через параметр. Обычно это делается просто через анализ дискриминанта. Но иногда в задачах с параметром просят найти такие значения параметра, при которых корни принадлежат определенному числовому промежутку. Например:

* Найдите такие значения параметра, чтобы оба корня были меньше некоторого числа γ: x1 ≤ x2 < γ.
* Только один из корней принадлежит какому-то промежутку (γ; β):
2 случая: γ < x1 < β ≤ x2; или x1 ≤ γ < x2 < β.
* Некоторое число γ лежит между корнями: (x1 < γ < x2).

Теперь разберемся, как при помощи математики записать те или иные условия. Разберем условие: x1 ≤ x2 < γ. Точно такие же рассуждения будут справедливы и для других условий.

1. Очевидно, что D ≥ 0. Для того, чтобы корни существовали (либо один, либо два корня - то и то нас устраивает – именно поэтому знак неравенства больше либо равно).
2. Чтобы некоторое число лежало вне отрезка (x1, x2), необходимо рассмотреть два случая: ветки параболы направлены вверх (a > 0); ветки параболы направлены вниз (a < 0).
	* a > 0. Значит, между корнями функция принимает отрицательные значения, а вне этого отрезка – положительные. Так как наше число γ должно по условию лежать вне отрезка (x1, x2), то f(γ) > 0.
	* а < 0. Значит, между корнями функция принимает положительные значения, а вне этого отрезка – отрицательные. Так как наше число γ должно по условию лежать вне отрезка (x1, x2), то f(γ) < 0.

Используем небольшую хитрость, чтобы описать оба этих условия:

a ∗ f(γ) > 0. Этим условием мы накладываем ограничение, что наши корни должны лежать слева или справа от числа γ.

В итоге получаем:

если a ∗ f(γ) < 0, то γ ∈ (x1, x2),

если a ∗ f(γ) > 0, то γ ∉ (x1, x2).

Осталось наложить условие, чтобы наши корни были слева от числа γ. Здесь нужно просто сравнить положение вершины нашей параболы x0 относительно γ. Заметим, что вершина лежит между точками x1 и x2. Если x0 < γ, то в системе с предыдущими условиями это будет означать, что число γ лежит справа от отрезка (x1, x2) и соответственно удовлетворяет условию задачи x1 ≤ x2 < γ.

Таким образом, для того, чтобы решить эту задачу необходимо решить следующую систему:

$$\left\{\begin{array}{c}D\geq 0\\x\_{0}<γ\\a\*f(γ)>0\end{array}\right.$$

**2. Применение квадратного трехчлена с параметром.**

Опишем типы задач, решаемые на основании свойств квадратного трехчлена. Приведем по одному примеру на каждый тип заданий.

**2.1. Квадратный трехчлен в функциях.**

*Пример 1.* Найти все значения параметра *а,* при которых график функции $y=\left(a+2\right)x^{2}+4x+3-a$ имеет с осью *Ох* только одну общую точку.

**Решение:**

**1)** Допустим, что коэффициент при x2 равен нулю, т.е. a + 2 = 0, тогда а = –2. Тогда получим функцию y = 4x + 5. График этой функции имеет одну общую точку с осью Ох, что соответствует условию задачи. Следовательно, а = –2 нам подходит.

**2)** Допустим, что коэффициент при х2 не равен нулю, т.е. а ≠ –2. Тогда графиком данной функции является парабола. Так как она должна иметь с осью Ох только одну общую точку, то:

D = 16 – 4(a + 2)·(3 – a) = 0

D = 16 – 12a + 4a2 – 24 + 8a = 0

 Следовательно, а = –1 или а = 2

**Ответ:** a = -1; a = ±2.

**2.2. Квадратный трехчлен в уравнениях**

*Пример 1.* Найти все значения параметра a, при которых уравнение $ ax^{2}-4x+a+3=0$ имеет более одного корня.

**Решение:**

1) Если a = 0, то уравнение примет вид -4x = -3 и имеет единственный корень x = $\frac{3}{4}$, что не удовлетворяет условию.

2) Если a ≠ 0, то данное уравнение – квадратное. Оно имеет два корня, если его D > 0.

D = 16 – 4a(a + 3) = 16 – 4a2 – 12a = - 4a2 – 12a + 16; - 4a2 – 12a + 16 > 0; a2 + 3a – 4 < 0. Решая квадратичное неравенство, получаем a ∈ (-4; 1). Однако в полученный промежуток (-4; 1) входит число 0, которое, как мы уже проверили, не подходит, следовательно, a ∈ (-4; 0) ∪ (0; 1).

Ответ. a ∈ (-4; 0) ∪ (0; 1).

**2.3. Квадратный трехчлен в неравенствах**

*Пример 1.* Найти все значения параметра а, при которых для любого значения х выполнено неравенство $\left(a^{2}-1\right)x^{2}+2\left(a-1\right)x+1>0$.

**Решение:**

Если a2 – 1 = 0, то неравенство становится линейным. При a = 1 получаем неравенство 1 > 0, оноверно для любых x.

При a = -1 получаем 4x < 1; x < $\frac{1}{4}$. Неравенство выполняется не для всех х, значит a ≠ -1.

Если a ≠ 1 и a ≠ -1, то, чтобы неравенство выполнялось для любых x, D должен быть меньше 0(чтобы парабола была выше оси Ox), ветви параболы направлены вверх, т.е. коэффициент при x2 больше 0. Тогда получаем систему:

$$\left\{\begin{array}{c}a^{2}-1>0\\\frac{D}{4}=(a-1)^{2}-a^{2}+1<0\end{array}\leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\left(a-1\right)\left(a+1\right)>0\\2-2a<0\end{array}\right.\right.\leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}a \in \left(-\infty ; -1\right)∪(1; +\infty ) \\a \in (1; +\infty )\end{array}\right.$$

**Ответ:** a ∈ [1; +∞)

**Список использованных источников:**

1. Бояркина Г.П., Пащенко Г.Я. Задачи с параметрами: Учебное пособие. - Иркутск: ИрИИТ, 2000.- 146с.
2. Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С. Задачи с параметрами. - М.: ИЛЕКСА, Харьков: Гимназия, 1998,- 336с.
3. Крамор В.С. Примеры с параметрами и их решения.-М.: ИНФРА-М, 1997.-40с.
4. Шабунин Н.И. Уравнения и системы уравнений.-М.: Аквариум, 1997.-272с.